
Fecha de inicio: 21/02/2020

Consultor: Andrés García Saavedra **Fecha límite de entrega: 13/03/2020**

- Envía la solución en un archivo PDF que has de llamar `PEC1_MT_Apellido1_Apellido2`.
- Justifica siempre tus respuestas.
- Todos los ejercicios puntúan por igual.
- Puedes utilizar software matemático (por ejemplo, CalcMe) para las integrales y las gráficas, pero recuerda que el exámen no se permite usar el software Wiris.

Ejercicios:

1. Un cierto dispositivo es muy sensible a la radiación electromagnética, de forma que cuando la radiación es superior al 75 % de un umbral determinado, el dispositivo solo funciona el 25 % de las veces. Sin embargo, para otros niveles de radiación, el dispositivo funciona correctamente el 65 % de las veces. Se sabe también que la probabilidad que la radiación sea superior al 75 % es 0,25. Se pide:
a) Sabiendo que el dispositivo funciona, ¿cuál es la probabilidad que el nivel de radiación sea superior al 75 %?
b) ¿Cuál es la probabilidad que el dispositivo funcione y el nivel de radiación sea superior al 75 %?
c) ¿Cuál es la probabilidad que el dispositivo funcione?

Solución
Primero de todo debemos dar nombres a los sucesos, por ejemplo:
H =el nivel de radiación es superior al 75 %
$\overline{H}$ =el nivel de radiación no es superior al 75 %
F =el dispositivo funciona

$\overline{F}$ =el dispositivo no funciona

a) Usando el Teorema de Bayes (Módulo 1, Apartado 2.4):

$P(H|F) = \frac{P(F|H)P(H)}{P(F|H)P(H)+P(F|\overline{H})P(\overline{H})} = 0{,}1136.$

b) $P(H \cap F) = P(F|H)P(H) = 0{,}25^2 = 0{,}0625.$

c) Según la fórmula de la probabilidad total (Módulo 1, Apartado 2.4, ecuación (22)):
$P(F) = P(F \cap H) + P(F \cap \overline{H}) = P(F|H)P(H) + P(F|\overline{H})P(\overline{H}) = 0{,}25^2 + (0{,}65)(0{,}75) = 0{,}55.$

2. Una subasta de espectro electromagnético tiene 10 frecuencias a cubrir. Al operador de telecomunicaciones se le dan a elegir 7 de las 10 frecuencias para la subasta. Se pide:
a) Calcula de cuantas maneras el operador de telecomunicaciones puede elegir las frecuencias.
b) Si al operador de telecomunicaciones se le comunica que las 4 primeros frecuencias se deben cubrir seguro, calcula de cuantas maneras puede elegir los frecuencias.

Solución
a) Observad que las frecuencias no pueden repetirse. Además, el orden en que el operador elija las frecuencias no importa. Entonces se trata de muestras no ordenadas sin repetición (Módulo 1, Apartado 1.3),

$$C_{10,7} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{(10-7)!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ maneras.}$$

b) Como ahora las primeras 4 frecuencias son obligatorias, el operador de telecomunicaciones puede escoger 3 frecuencias entre las 6 restantes para llegar a las 7 frecuencias requeridas. De nuevo se trata de muestras no ordenadas sin repetición (Módulo 1, Apartado 1.3). Así pues,

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ maneras.}$$

3. Una máquina produce antenas cuyo diámetro, medido en centímetros, se puede expresar mediante una variable aleatoria X que presenta la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Se pide:
a) Calcular el valor de la constante c.
b) Calcular la probabilidad $P(1 < X < 2)$.

Solución
a) Para resolver este apartado necesitaremos la teoría del Módulo 2, Apartado 3.1 (*Variables aleatorias*), en particular, necesitamos comprobar que se cumplan las propiedades (19) y (22).

Como $f_X(x)$ satisface la propiedad (19) si $c \geq 0$, también debe satisfacer la propiedad (22) para ser una función de densidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^3 cx^2 dx = \left[\frac{cx^3}{3}\right]_{x=0}^{x=3} = 9c,$$

por lo tanto $9c = 1$ y $c = \frac{1}{9} = 0{,}11$.

b)

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{7}{27} = 0{,}26.$$

4. El tiempo de reparación de una antena de telecomunicaciones tiene una distribución exponencial, con media de 22 minutos. Se pide:
a) Encontrar la probabilidad que el tiempo de reparación de la antena sea menor que 10 minutos.
b) Para realizar una programación, ¿cuanto tiempo se debe asignar a cada reparación para

que la probabilidad de que el tiempo de reparación supere el tiempo asignado sea solo de 0.1?
c) Sabiendo que el tiempo de reparación ya ha sobrepasado los 5 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación tarde al menos 15 minutos?

Solución
Definimos una variable aleatoria X que representa el tiempo de reparación (en minutos) de la antena, y que sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = \frac{1}{22}$. Por lo tanto, usaremos la teoria que aparece en el Módulo 2, Apartado 3.2.2. La función de densidad de esta variable es

$$f_X(x) = \frac{1}{22}e^{-\frac{x}{22}} \qquad x \geq 0$$

y la función de distribución es

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{22}e^{-\frac{x}{22}} \qquad x \geq 0.$$

a) La probabilidad que un tiempo de reparación sea menor que diez minutos es:

$$P(X \leq 10) = \int_0^{10} \frac{1}{22}e^{-\frac{x}{22}}dx = -e^{-\frac{x}{22}}|_0^{10} = 1 - e^{-\frac{5}{11}} = 0{,}365$$

b) Representamos con t ($t > 0$) el tiempo asignado a una reparación (en minutos). Debe verificarse:

$$P(X > t) = 0{,}1$$

es decir

$$\int_t^{\infty} \frac{1}{22}e^{-\frac{x}{22}}dx = -e^{-\frac{1}{22}} \;|_t^{\infty} = e^{-\frac{t}{22}} = 0{,}1$$

y esto se cumple para $t = -22\ln(0{,}1) = 50{,}657 \approx 51$ minutos.

c) Este apartado es análogo al Ejemplo 3.2 del Módulo 2. En este caso debemos calcular la siguiente probabilidad condicionada:

$$P(T > 15|T > 5) = \frac{(P(T > 15) \cap (T > 5))}{P(T > 5)} = \frac{P(T > 15)}{P(T > 5)} = \frac{1 - F(15)}{1 - F(5)} = \frac{0{,}023}{0{,}036} = 0{,}64.$$

5. Considera dos sucesos A y B independientes. ¿Son los sucesos complementarios, $\overline{A}$ y $\overline{B}$, también independientes? Demuestra o encuentra un contraejemplo.

Solución
Vamos a demostrar que los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ también son independientes. Sabemos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Además:

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B}). \end{aligned}$$