Procesos estocásticos estacionarios

PID_00253305

Josep Maria Aroca

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 3 horas

Universitat Oberta de Catalunya

Índice

Introducción

En los módulos anteriores hemos definido y hemos trabajado con algunas propiedades de los procesos estocásticos en general. Hemos visto cómo se definen los procesos estocásticos en el módulo "Introducción a los procesos estocásticos". En el módulo "Caracterización estadística y parámetros de los procesos estocásticos" hemos visto los parámetros estadísticos más importantes que caracterizan un proceso estocástico. En este módulo veremos un tipo particular de procesos estocásticos, los denominados **procesos estacionarios**. Veremos que las propiedades estadísticas de estos procesos no dependen de la posición temporal en la que las medimos. Esto se corresponde a situaciones en las que la dinámica subyacente al proceso no depende explícitamente del tiempo.

Diferenciaremos dos tipos de procesos estacionarios:

- Los procesos estacionarios en sentido estricto.
- Los procesos estacionarios en sentido amplio o débil.

Para los procesos del primer tipo exigiremos que la estadística sea siempre invariable, independiente del momento temporal en el que miramos el proceso. Para los procesos estacionarios en sentido amplio, en cambio, solo pediremos que las funciones media y autocorrelación no dependan de t. De hecho, la estacionariedad en sentido amplio nos sirve para modelizar muchos tipos de señales y de sistemas de procesamiento de señal.

Un aspecto nuevo que introducimos en este módulo es el análisis en frecuencia de este tipo de procesos. Veremos que esta transformación es muy útil a la hora de trabajar con señales, filtros y otros sistemas de comunicaciones, ya que muchas veces el tratamiento en frecuencia nos simplifica mucho los cálculos. El concepto principal que veremos es el de **densidad espectral de potencia**.

Este módulo se estructura como sigue: en el apartado 1 veremos la diferencia entre un proceso estocástico estacionario en sentido estricto y en sentido amplio. El apartado 2 lo dedicamos a estudiar las oscilaciones aleatorias como ejemplo de proceso estocástico estacionario. En el apartado 3 se estudian los procesos cicloestacionarios. Veremos que para un proceso cicloestacionario, la media y la función de autocorrelación son funciones periódicas. En el apartado 4 se define y se estudia la noción de espectro de potencia de un proceso estacionario.

Objetivos

Los objetivos que debe alcanzar el estudiante una vez trabajados los materiales didácticos de este módulo son:

1. Entender el concepto de estacionariedad en sentido estricto y en sentido amplio y saber poner ejemplos.

2. Analizar la estacionariedad por medio del análisis de oscilaciones aleatorias.

3. Estudiar los procesos estocásticos cicloestacionarios en sentido amplio y en sentido estricto. Entender la diferencia de este tipo de procesos respecto a los procesos aleatorios estacionarios y saber poner ejemplos.

4. Comprender el concepto de espectro de potencia de un proceso y entender la relación con la autocorrelación.

1. Estacionariedad en sentido estricto y en sentido amplio

En este apartado definiremos qué es un proceso estocástico estacionario y veremos que hay dos tipos: los procesos estacionarios en sentido estricto y en sentido amplio.

Dado un proceso estocástico, nos podemos plantear si su estadística es invariante en el tiempo. Por ejemplo, en el movimiento browniano* la causa del movimiento son las fluctuaciones térmicas del líquido que está en equilibrio termodinámico, que son independientes del tiempo. Si un proceso tiene esta independencia del tiempo, hemos de esperar que sus realizaciones muestren características similares en diferentes intervalos de tiempo. Es decir, podemos estudiar el proceso sobre diferentes intervalos y obtener muchas realizaciones y comparar su aspecto. Si observamos el mismo comportamiento, tenemos un síntoma de lo que denominaremos estacionariedad. Antes de definirla con precisión, veamos un ejemplo.

* Podéis ver también el ejemplo 4.4 del módulo "Introducción a los procesos estocásticos".

Procesos estacionarios

A grandes rasgos, un proceso es estacionario si su estadística es independiente del tiempo.

Ejemplo 1.1

Partimos de una variable aleatoria B uniforme en $[0,1]$ y definimos dos procesos estocásticos:

$$X(t) = e^{-Bt}, \qquad Y(t) = \sin(t + 2\pi B).$$

Comparamos el resultado de representar gráficamente varias realizaciones sobre intervalos temporales diferentes, concretamente $[0,1]$, $[2,3]$ y $[9,10]$. El resultado se muestra en las figuras 1 y 2.

Figura 1. Realizaciones del proceso e^{-Bt}

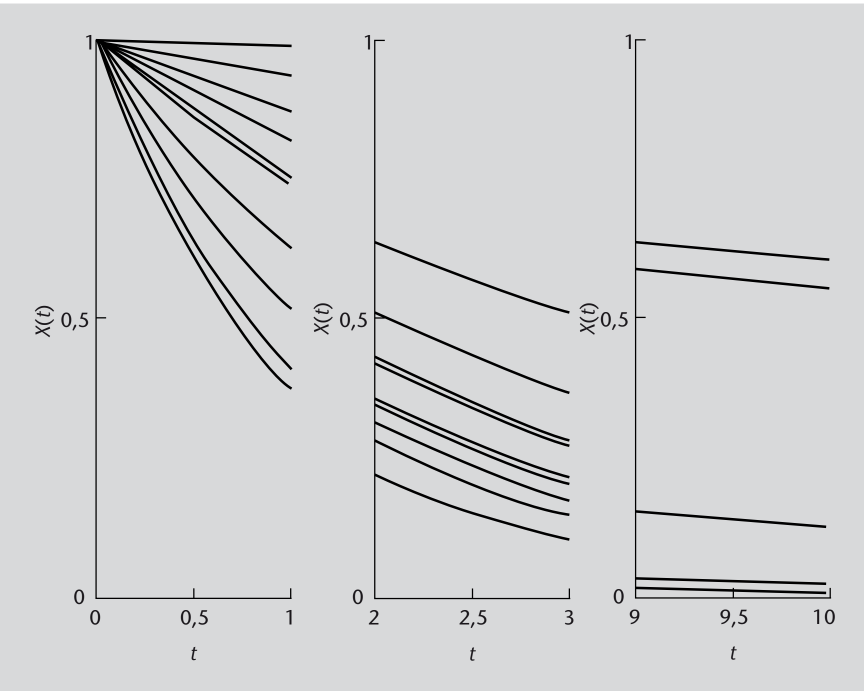


Figura 1

Esta figura representa varias realizaciones del proceso $X(t)$, que en este caso tiene forma de funciones exponenciales, y evaluadas en diferentes intervalos temporales. Como podéis ver, el proceso $X(t)$ no parece repetirse a lo largo del tiempo.

Figura 2. Realizaciones del proceso $\sin(t + 2\pi B)$

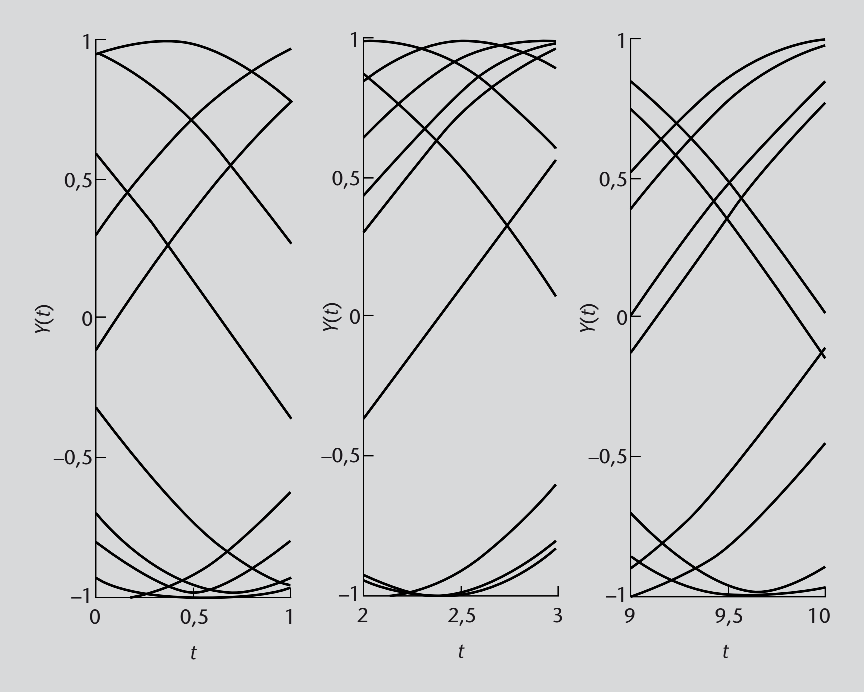


Figura 2

En este caso se representan diferentes realizaciones del proceso $Y(t)$, que tiene forma sinusoidal, en diferentes intervalos temporales. Fijaos en que en este caso los valores del proceso estocástico sí que tienen una cierta regularidad a lo largo del tiempo.

En el primer caso se ve una clara diferencia en los tres intervalos. Resulta que cuanto mayores son los valores de t que observamos, más pequeños son los valores que toman las realizaciones. Si nos mostrasen muchas realizaciones sobre un intervalo temporal desconocido, podríamos tener una idea de por dónde está localizado este intervalo a partir del aspecto de las realizaciones.

En el segundo caso las tres gráficas tienen un aspecto muy similar. No podemos deducir por dónde está localizado el intervalo temporal de la observación de las realizaciones. Esto sugiere que este proceso puede ser estacionario.

Decimos que un proceso estocástico es **estacionario** si su distribución probabilística es invariante bajo cualquier translación temporal. De manera más precisa, como la caracterización de la estadística de un proceso se hace por medio de sus muestras, llegamos a la definición siguiente.

Definición 1.1. El proceso estocástico $X(t)$ es **estacionario en sentido estricto** si para todo $n \geq 1$ y para toda elección de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ los vectores aleatorios $(X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \ldots, X(t_n+\tau))$ y $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ tienen la misma distribución de probabilidad para todo τ real.

Las funciones de distribución de un proceso estacionario en sentido estricto verifican:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1+\tau, t_2+\tau, \ldots, t_n+\tau) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n). \quad (1)$$

Para todo n, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y τ. Tendremos las mismas expresiones para las funciones de densidad de un proceso de estado continuo y para las funciones de probabilidad de un proceso de estado discreto.

Ejemplo 1.2

Analicemos la condición de estacionariedad para los dos procesos que hemos visto en el ejemplo 1.1. Nos limitaremos a muestras de tamaño 1. Así, obtendremos la densidad de primer orden $f(x;\ t)$ y miraremos si esta depende de t.

Para el caso de $X(t) = e^{-Bt}$ tenemos que, dado que B varía de 0 a 1, fijado t, $X(t)$ varía de e^{-t} a 1. Obtenemos la función de densidad haciendo el cambio directamente a partir de la densidad de B. La relación entre variables es $x = e^{-bt}$. La densidad de B, que es una variable uniforme, es $f_B(b) = 1, 0 \le b \le 1$. Entonces, para $x \in [e^{-t}, 1]$:

$$f(x;\ t) = \frac{f_B(b)}{|dx/db|} = \frac{1}{te^{-bt}}.$$

Expresando el resultado en términos de x llegamos a:

$$f(x;\ t) = \frac{1}{tx}, \qquad\qquad e^{-t} \le x \le 1.$$

Esta densidad depende de t, hecho que demuestra que este proceso no es estacionario. Esto es lo que habíamos previsto en las realizaciones dibujadas en la primera figura.

Ahora veremos el segundo proceso estocástico. Para el proceso $Y(t) = \sin(t + 2\pi B)$ observamos que el argumento del seno, cuando B varía de 0 a 1, recorre el intervalo $[t, t + 2\pi]$. Esto es un periodo completo del seno, de manera que $Y(t)$ adquiere todos los valores entre -1 y 1.

Figura 3. Gráfica de la dependencia entre b y $y = \sin(t + 2\pi b)$, para el caso $t = 1$

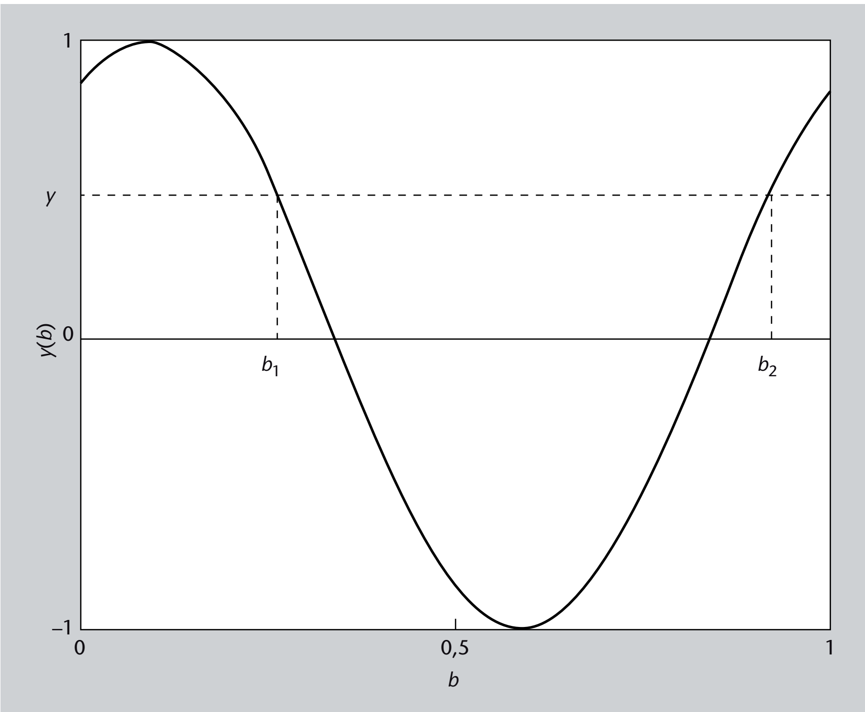


Figura 3

Las diferentes realizaciones del proceso $Y(t)$ tienen forma sinusoidal y, por lo tanto, se van repitiendo en el tiempo.

Como se ve en la gráfica de la figura 3, para cada y entre -1 y 1 hay dos valores de b (b_1 y b_2) que van a parar allí. También vemos aquí que por simetría la pendiente de la recta tangente (derivada) en estos puntos es igual y de signo opuesto. La fórmula del cambio de variable a la densidad nos queda:

$$f(y;\ t) = \frac{f_B(b_1)}{|\frac{dy}{db}(b_1)|} + \frac{f_B(b_2)}{|\frac{dy}{db}(b_2)|}.$$

Ahora tenemos que $f_B(b_1) = f_B(b_2) = 1$, $|\frac{dy}{db}(b_2)| = |\frac{dy}{db}(b_1)|$ y

$$\frac{dy}{db} = 2\pi\cos(t + 2\pi b) = 2\pi\sqrt{1 - \sin^2(t + 2\pi b)} = 2\pi\sqrt{1 - y^2}.$$

La función de densidad de primer orden del proceso $Y(t)$ queda:

$$f(y;\ t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - y^2}} \qquad -1 \leq y \leq 1.$$

Vemos, pues, que esta densidad no depende de t (notamos que esto hace referencia tanto a la forma de la función $f(y;\ t)$ como al intervalo de valores que puede tomar y). Esto es consistente con lo que sospechábamos a partir de las gráficas (ejemplo 1.1). Observemos que esto no demuestra que el proceso sea estacionario, ya que solo hemos visto la invarianza de las propiedades estadísticas de primer orden. En el apartado siguiente de este módulo se demostrará que este proceso es estacionario en sentido estricto.

Veamos ahora que en un proceso estacionario en sentido estricto los parámetros verifican ciertas condiciones.

Proposición 1.1. Si un proceso estocástico $X(t)$ es estacionario en sentido estricto, entonces el valor medio es constante y la autocorrelación depende solo de la diferencia entre los dos instantes: $m(t) = m$ y $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$.

Observación

Para los procesos estocásticos estacionarios se cumple que $m(t) = m$ y $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$.

Demostración: 1) $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$. Como $X(t)$ es estacionario en sentido estricto, la condición de invariancia (definición 1.1) en el caso $n = 1$ nos dice que $X(t)$ y $X(t + \tau)$ son variables distribuidas igualmente para todo t y para todo τ. Para el caso particular $\tau = -t$ resulta que, para todo t, $X(t)$ tiene la misma distribución que $X(0)$ ($X(t + \tau) = X(t - t) = X(0)$). Entonces $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(X(0))$, que es un número que denominamos m. Así, $m(t) = m$ independiente de t.

2) $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))$. Si en la condición de invarianza ahora hacemos $n = 2$ y tomamos $\tau = -t_1$, el vector $(X(t_1), X(t_2))$ está distribuido idénticamente en $(X(0), X(t_2 - t_1))$. Así, la distribución de cualquier muestra de dos instantes depende solo de la distancia temporal entre estos. Ahora tenemos $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = \mathrm{E}(X(0)X(t_2 - t_1)) = R(0, t_2 - t_1)$ y escribimos esta función como dependiente de una sola variable: $R(t_2 - t_1)$. ■

El final de las demostraciones las indicamos con el símbolo ■.

Es habitual denominar τ la diferencia entre los dos instantes de tiempo, t_1 y t_2, de manera que podemos escribir $R(\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))$. Igualmente deducimos que $C(t_1, t_2) = C(t_2 - t_1)$ (observemos que para procesos estacionarios R y C difieren solo en una constante, $C(\tau) = R(\tau) - m^2$).

A veces no se conoce toda la distribución de probabilidad de un proceso, de manera que no podemos determinar si es estacionario en sentido estricto, pero es habitual conocer las funciones $m(t)$ y $R(t_1, t_2)$, lo que nos lleva a una versión més débil del concepto de estacionariedad, la **estacionariedad en sentido amplio**.

Estacionariedad en sentido amplio y estricto

Comparad la definición de estacionariedad en sentido amplio y estricto y advertid que si un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto, también lo es en sentido amplio.

Definición 1.2. El proceso estocástico $X(t)$ es **estacionario en sentido amplio** si su función de valor medio es constante y su función de autocorrelación depende solo de la diferencia de tiempo:

$$m(t) = m, \tag{2}$$

$$R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1). \tag{3}$$

Cuando calculamos la autocorrelación podemos mantener la notación $R(t_1, t_2)$ o utilizar, alternativamente, la forma $R(t, t+\tau)$. Si lo hacemos de esta última manera, la ecuación (3) equivale a decir que $R(t, t+\tau)$ no depende de t. En general, esto es más sencillo que ver si una expresión en dos variables depende solo de su diferencia.

Ejemplo 1.3

Tenemos un proceso aleatorio $X(t)$ y necesitamos transmitirlo por un canal que trabaja solo en ciertas frecuencias. Para poder transmitirlo modulamos nuestra señal $X(t)$ con una portadora $\cos(\omega_0 t + \theta)$. De esta manera hemos formado un nuevo proceso aleatorio $Y(t) = X(t)\cos(\omega_0 t + \theta)$. El ángulo θ es una variable distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 2\pi)$ e independiente del proceso $X(t)$. ¿Bajo qué condiciones el proceso $Y(t)$ será estacionario en sentido amplio?

Para responder a esta pregunta deberemos calcular el valor medio y la autocorrelación, tal como acabamos de ver en la proposición 1.1. Comencemos con la función valor medio:

$$m_Y(t) = \mathrm{E}[X(t)\cos(\omega_0 t + \theta)] = \mathrm{E}[X(t)]\,\mathrm{E}[\cos(\omega_0 t + \theta)] = 0.$$

Observad que la esperanza de los términos en los que aparece θ dentro del coseno es cero.

Vemos que el valor medio es constante y vale cero. Calculemos ahora la función de autocorrelación:

$$R_Y(t_1, t_2) = \mathrm{E}[Y(t_1)Y(t_2)] = \mathrm{E}[X(t_1)\cos(\omega_0 t_1 + \theta)X(t_2)\cos(\omega_0 t_2 + \theta)].$$

Agrupando términos y considerando que $X(t)$ y θ son independientes, llegamos a la expresión siguiente:

$$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]\,\mathrm{E}[\cos(\omega_0 t_1+\theta)\cos(\omega_0 t_2+\theta)].$$

Sabemos que $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$. Por tanto:

$$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}[\cos(\omega_0(t_1+t_2)+2\theta)+\cos(\omega_0(t_2-t_1))] =$$

$$\tfrac{1}{2}R_X(t_1,t_2)\cos\omega_0(t_2-t_1).$$

Vemos que el término que depende de la frecuencia portadora sí que depende de la diferencia de tiempo. La autocorrelación de $Y(t)$ dependerá solo de la diferencia de tiempo si la autocorrelación de $X(t)$, $R_X(t_1,t_2)$ depende también de la diferencia de tiempo. En este caso, el proceso $Y(t)$ será estacionario en sentido amplio si $X(t)$ también lo es. Fijaos en que podemos asegurar que es estacionario en sentido amplio, pero no podemos asegurar que lo sea en sentido estricto (deberíamos hacer más cálculos para verlo).

Ejemplo 1.4

Construimos un proceso estocástico tal que $X(t) = At + B$, donde A y B son variables aleatorias independientes y uniformes en el intervalo $(-1,1)$. Veamos si este proceso es estacionario en sentido amplio. Calculemos, en primer lugar, el valor medio:

$$m_X(t) = \mathrm{E}[At+B] = \mathrm{E}[A]t + \mathrm{E}[B] = 0.$$

Vemos que este valor medio es constante e igual a cero. Calculemos, a continuación, la función de autocorrelación:

$$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}[(At_1+B)(At_2+B)] = \mathrm{E}[A^2t_1t_2+B^2+AB(t_1+t_2)] = \frac{1}{3}t_1t_2+\frac{1}{3}.$$

Fijaos en que en este caso la función de autocorrelación no depende de la diferencia de tiempo t_2-t_1; por tanto, podemos decir que $X(t)$ no es un proceso estacionario (no lo es en sentido amplio y, por lo tanto, tampoco lo será en sentido estricto).

Recordatorio

Como vimos en el apartado 3 del módulo "Variables aleatorias", $\mathrm{E}(X^2) = \int x^2 f(x)dx$. Para el caso de esta distribución uniforme, $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}$. Per tant $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}$ en este ejemplo.

Como hemos visto, todo el proceso estacionario en sentido estricto también lo es en sentido amplio. Lo contrario no es cierto. Hay procesos estacionarios en sentido amplio que no lo son en sentido estricto.

A partir de los conceptos que acabamos de ver en este apartado, dedicaremos el apartado siguiente al estudio de las oscilaciones aleatorias. Este tipo de señales son ampliamente utilizadas en sistemas de telecomunicaciones y muy a menudo se utilizan para modelizar señales más complejas.

A continuación veremos una serie de ejemplos, determinaremos si los procesos son estacionarios en sentido estricto o amplio y calcularemos sus parámetros.

2. Oscilaciones aleatorias

En este apartado estudiaremos las oscilaciones aleatorias* y estudiaremos las propiedades de estacionariedad de esta señal.

* Retomamos en este apartado el ejemplo de las oscilaciones aleatorias que ya habíamos visto en el módulo "Caracterización estadística y parámetros de los procesos estocásticos".

Ejemplo 2.1

Ya habíamos visto** una señal a una frecuencia determinada, pero la amplitud de la señal y su fase variaban de manera aleatoria. La señal tenía la forma siguiente:

** En el ejemplo 3.3 del módulo "Caracterización estadística y parámetros de los procesos estocásticos".

$$X(t) = A\cos(\omega t + B),$$

donde ω se definía como una constante, A era una variable aleatoria exponencial de valor medio K y B una variable aleatoria uniforme distribuida en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Habíamos obtenido el valor siguiente para la función de valor medio:

$$m(t) = 0$$

y el resultado siguiente respecto a la función de autocorrelación:

$$R(t_1, t_2) = K^2\cos(\omega(t_1 - t_2)).$$

Esto nos muestra que el proceso $X(t) = A\cos(\omega t + B)$ es estacionario en sentido amplio con $m = 0$ y $R(\tau) = K^2\cos(\omega\tau)$.

Ahora nos podemos plantear si además lo es en sentido estricto. Resulta que sí, y se puede ver mediante el hecho siguiente. Al hacer un desplazamiento temporal, $X(t+\tau) = A\cos(\omega(t+\tau) + B) = A\cos(\omega t + (B + \omega\tau))$. Así, el efecto de una translación temporal equivale a cambiar la variable B por $B + \omega\tau$. Pero si B era uniforme sobre un periodo de longitud 2π, el hecho de sumarle una constante da una nueva variable que también es uniforme sobre un intervalo de longitud 2π, con lo que la estadística del proceso queda invariante.

Podemos generalizar el análisis de la estacionariedad para el caso de oscilaciones aleatorias cualquiera. Como vimos**:

Definición 2.1. Una **oscilación aleatoria** es un proceso que se puede expresar:

$$X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{4}$$

donde ω está fijada y (A, B) es un vector aleatorio bidimensional.

Proposición 2.1. El proceso de oscilación aleatoria (4) es estacionario:

1) **En sentido amplio** si y solo si $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ y el coeficiente de correlación entre A y B vale $\rho = 0$.
2) **En sentido estricto** si y solo si la distribución de (A, B) tiene simetría circular. Decimos que un vector aleatorio bidimensional tiene simetría circular cuando la función de densidad conjunta $f(x, y)$ depende solo de la distancia del punto (x, y) en el origen de coordenadas y no de su orientación.

Demostración:

1) **Estacionariedad en sentido amplio**. Observad que el valor medio del proceso es el siguiente:

$$m(t) = \mathrm{E}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = \mathrm{E}(A)\cos\omega t + \mathrm{E}(B)\sin\omega t.$$

Y la función de autocorrelación es la siguiente:

$$R(t, t+\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))$$

$$= \mathrm{E}[(A\cos\omega t + B\sin\omega t)(A\cos\omega(t+\tau) + B\sin\omega(t+\tau))]$$

$$= \mathrm{E}(A^2)\cos\omega t\cos\omega(t+\tau) + \mathrm{E}(B^2)\sin\omega t\sin\omega(t+\tau) +$$

$$+\mathrm{E}(AB)(\cos\omega t\sin\omega(t+\tau) + \sin\omega t\cos\omega(t+\tau)).$$

a) Demostraremos que si $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ y $\rho = 0$, entonces el proceso es estacionario en sentido amplio.

Supongamos que se verifica $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ y $\rho = 0$. Denominamos σ^2 (sigma al cuadrado) el valor común de la varianza de A y B. Entonces tenemos que:

$$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{E}(A)^2 = \sigma^2,$$

$$\mathrm{E}(B^2) = \mathrm{Var}(B) + \mathrm{E}(B)^2 = \sigma^2.$$

También resulta que $\rho = 0$ equivale a $\mathrm{Cov}(A, B) = 0$. En nuestro caso, por hipótesis, $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, de manera que:

$$\mathrm{Cov}(A, B) = \mathrm{E}(AB) - \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = \mathrm{E}(AB).$$

Técnica de demostración

Para demostrar la condición *si y solo si* del enunciado 1 debemos demostrar los dos sentidos de la implicación, es decir:

- Si $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ y $\rho = 0$, entonces el proceso es estacionario en sentido amplio.
- Si el proceso es estacionario en sentido amplio, entonces $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ y $\rho = 0$

De modo que concluimos también que $\mathrm{E}(AB) = 0$.

Sustituyendo estos valores en las expresiones de $m(t)$ y $R(t, t+\tau)$ obtenemos $m(t) = 0$ y

$$R(t, t+\tau) = \sigma^2(\cos\omega t \cos\omega(t+\tau) + \sin\omega t \sin\omega(t+\tau)) = \sigma^2 \cos\omega\tau.$$

Vemos, pues, que $m(t)$ es constante y $R(t, t+\tau)$ solo depende de τ, es decir, el proceso es estacionario en sentido amplio.

b) Ahora demostraremos la implicación contraria. Es decir, que si el proceso es estacionario en sentido amplio, entonces $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ y $\rho = 0$.

Supongamos que el proceso es estacionario en sentido amplio. Entonces, dado que $m(t)$ es constante, $m(0) = m(\frac{\pi}{\omega})$, es decir, $\mathrm{E}(A) = -\mathrm{E}(A)$ y entonces $\mathrm{E}(A) = 0$. De manera análoga, $m(\frac{\pi}{2\omega}) = m(\frac{3\pi}{2\omega})$, es decir, $\mathrm{E}(B) = -\mathrm{E}(B)$ y entonces $\mathrm{E}(B) = 0$.

También tenemos que, por hipótesis, $R(t, t+\tau)$ no depende de t. Así, para el caso $\tau = 0$, $R(t,t)$ es independiente de t, entonces $R(0,0) = R(\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega})$, es decir, $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(B^2)$. Si representamos $\sigma^2 = \mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(B^2)$, queda:

$$R(t, t+\tau) = \sigma^2 \cos\omega\tau + \mathrm{E}(AB) \sin\omega(2t+\tau).$$

Para que esta expresión no dependa de t es necesario que $\mathrm{E}(AB) = 0$. Hemos visto, pues, que $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = \mathrm{E}(AB) = 0$. De esto obtenemos:

$$\mathrm{Var}(A) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(A)^2 = \mathrm{E}(A^2) = \sigma^2,$$

$$\mathrm{Var}(B) = \mathrm{E}(B^2) - \mathrm{E}(B)^2 = \mathrm{E}(B^2) = \sigma^2,$$

$$\mathrm{Cov}(A, B) = \mathrm{E}(AB) - \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = 0.$$

Así hemos llegado a la conclusión $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ y $\rho = 0$.

2) **Estacionariedad en sentido estricto**.

Para ver cuándo es estacionario en sentido estricto utilizamos coordenadas polares: $A = R\cos\Theta$, $B = R\sin\Theta$.

Parámetros del proceso y de las variables

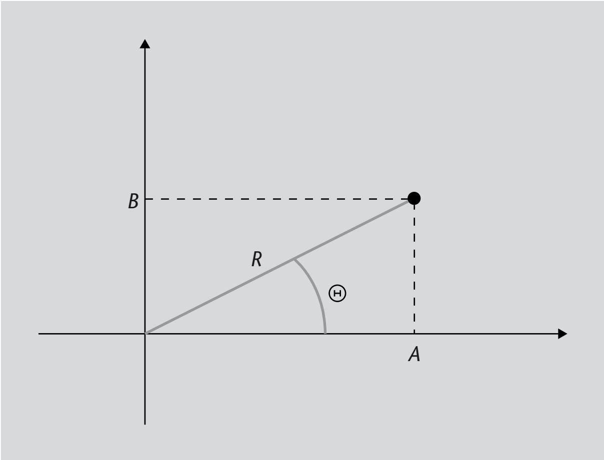
Observemos que $X(0) = A$, $X(\frac{\pi}{\omega}) = -A$, $X(\frac{\pi}{2\omega}) = B$ y $X(\frac{3\pi}{2\omega}) = -B$. Considerando que $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$ y $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))$, eligiendo valores específicos de t podemos relacionar los parámetros de las variables A y B con valores de las funciones $m(t)$ y $R(t_1, t_2)$.

Técnica de demostración

En este apartado también hay que demostrar la afirmación *si y solo si* del enunciado 2. Por lo tanto, habrá que demostrar los dos sentidos de la implicación:

- Si las variables (A, B) de la oscilación aleatoria tienen simetría circular, el proceso es estacionario en sentido estricto.
- Si el proceso es estacionario en sentido estricto, la distribución de (A, B) tiene simetría circular.

Figura 4. Significado de las coordenadas polares (R, Θ)



R es la distancia del punto (A, B) en el origen y Θ es el ángulo que forma el radio vector con el eje OX.

Figura 4

En esta figura podéis ver cuál es la relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares. En el primer caso expresamos un valor mediante los valores (x, y). En el segundo caso utilizamos distancia al origen de los ejes y un ángulo θ.

Entonces $X(t) = R\cos\Theta\cos\omega t + R\sin\Theta\sin\omega t = R\cos(\Theta - \omega t)$, donde hemos utilizado la fórmula trigonométrica $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Así, podemos expresar el proceso como:

$$X(t) = R\cos(\Theta - \omega t). \tag{5}$$

El vector (A, B) tiene simetría circular cuando su distribución de probabilidad depende de R y es, por lo tanto, invariante si hacemos cualquier desplazamiento del ángulo $\Theta \to \Theta - \alpha$.

a) Demostramos que si el proceso es estacionario en sentido estricto, entonces (A, B) tiene simetría circular:

Si el proceso es estacionario en sentido estricto, entonces el vector $(X(t), X\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right))$ tiene la misma distribución para todo t. En $t = 0$ y $t = \frac{\alpha}{\omega}$ tenemos los vectores $(R\cos\Theta, R\sin\Theta)$ y $(R\cos(\Theta - \alpha), R\sin(\Theta - \alpha))$, respectivamente. En polares corresponden a (R, Θ) y $(R, \Theta - \alpha)$. Así, la función de densidad no puede depender de θ, es decir, tenemos simetría circular.

b) Demostramos que si (A, B) tiene simetría circular, entonces el proceso es estacionario en sentido estricto:

Si tenemos simetría circular, el cambio $\Theta \to \Theta + \omega t_1$ deja todas las distribuciones invariantes. Ahora bien, utilizando la ecuación (5) vemos que este cambio nos pasa $X(t)$ a $X(t - t_1)$. Por lo tanto, la distribución conjunta del vector $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ es idéntica a la de $(X(0), X(t_2 - t_1), \ldots, X(t_n - t_1))$, que es invariante bajo translaciones temporales. ■

3. Cicloestacionariedad

Al definir la estacionariedad requerimos la invarianza bajo desplazamientos τ arbitrarios. Se puede dar el caso de un proceso cuya estadística sea invariante solo bajo desplazamientos que sean múltiples de un periodo determinado T. En esta situación hablamos de **ciclostacionariedad**.

Definición 3.1. El proceso estocástico $X(t)$ es **cicloestacionario en sentido estricto** si existe un número T tal que para todo $n \geq 1$ y para toda elección de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ los vectores aleatorios $(X(t_1 + kT), X(t_2 + xkT), \ldots, X(t_n + kT))$ y $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ tienen la misma distribución de probabilidad para todo k entero.

Esto significa que nuestro proceso estocástico tiene una estadística invariante para un desplazamiento T o para un múltiplo kT de este valor T. Como hemos visto en el caso de la estacionariedad, a veces no conocemos con detalle toda la estadística del proceso pero podemos aplicar una definición más relajada, es decir, en sentido más amplio, de cicloestacionariedad.

Definición 3.2. El proceso estocástico $X(t)$ es **cicloestacionario en sentido amplio** si existe una constante T tal que para todo k entero su función de valor medio verifica $m(t + kT) = m(t)$ (es decir, $m(t)$ es periódica) y su autocorrelación verifica $R(t_1 + kT, t_2 + kT) = R(t_1, t_2)$.

Ejemplo 3.1

Consideramos una oscilación aleatoria $X(t) = A \cos t + B \sin t$, tal que $\mathrm{E}(A) \neq 0$. Según el resultado que acabamos de ver en el apartado 2 de este módulo, $X(t)$ no puede ser estacionario porque hemos dicho que para que fuese estacionario en sentido amplio, la media de las variables aleatorias debía ser cero. En cambio, es cicloestacionario en sentido estricto. Esto se ve porque el propio proceso es periódico: $X(t + 2\pi) = X(t)$. Considerando que todas las realizaciones del proceso son periódicas, la estadística del proceso es invariante bajo el cambio $t \to t + 2\pi k$, para k entero.

El último apartado del módulo lo dedicaremos al estudio del espectro de potencia de los procesos estacionarios. El espectro de potencia de un proceso estocástico nos permitirá estudiar este tipo de procesos en el dominio de la frecuencia. Este salto conceptual es importante porque una vez caractericemos estos procesos en función de la frecuencia podremos integrar este tipo de señales en sistemas de telecomunicaciones que muy a menudo se caracterizan más en el dominio de la frecuencia que en el dominio del tiempo.

4. Espectro de potencia de un proceso estacionario

En este apartado definiremos qué es el espectro de potencia de un proceso estacionario. Esta definición la haremos a partir de la función de autocorrelación $R(\tau)$. Veamos, pues, qué propiedades tiene esta función y a continuación definiremos el espectro de potencia del proceso.

Consideramos un proceso $X(t)$ estacionario, con valor medio $m(t) = m$ y autocorrelación $R(\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))$. Algunas de las propiedades de la función $R(\tau)$ son las siguientes.

Funciones pares

En una función par se cumple que $f(x) = f(-x)$. Si dibujamos la gráfica de una función par, esta siempre tiene simetría respecto al eje y.

Proposición 4.1. Propiedades de la función de autocorrelación $R(\tau)$ de un proceso estacionario:

1) $R(\tau)$ es una función par.

2) $R(\tau)$ nos da una medida del ritmo de variación temporal del proceso.

3) $R(\tau)$ es máxima para $\tau = 0$, es decir, $|R(\tau)| \leq R(0)$ para todo τ.

Autocorrelación de un proceso estacionario

Dado que $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))$, al calcular esperanzas de productos de valores del proceso podemos expresar el resultado en función de R. Por ejemplo, $\mathrm{E}(X(t+\tau)X(t)) = R(t+\tau, t)$. Si el proceso es estacionario, $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))$ se reduce a $R(t_2 - t_1)$ (o $R(t_1 - t_2)$, ya que $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$). Por ejemplo, $R(t+\tau, t) = R(\tau)$.

Demostración:

1) En efecto, dado que $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$ (ya que podemos invertir el orden de los factores en la definición de la autocorrelación) resulta $R(-\tau) = R(\tau)$.

2) Demostramos a continuación la segunda propiedad: Queremos evaluar la diferencia $X(t+\tau) - X(t)$, pero al tratarse de una cantidad aleatoria lo que haremos es hacer la media de su cuadrado para tener una medida de su magnitud

$$\mathrm{E}((X(t+\tau) - X(t))^2) = \mathrm{E}(X(t+\tau)^2 - 2X(t+\tau)X(t) + X(t)^2)$$

$$= R(t+\tau, t+\tau) - 2R(t+\tau, t) + R(t,t) = 2(R(0) - R(\tau)).$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dice que para todo par de vectores X e Y de un espacio vectorial con producto escalar definido, se cumple que $|\langle X, Y\rangle|^2 \leq \langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle$.

3) Para demostrar la tercera propiedad partimos de $\mathrm{E}(XY)^2 \leq \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz) válida para todo par de variables aleatorias X y Y. Entonces $R(\tau)^2 = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))^2 \leq \mathrm{E}(X(t)^2)\,\mathrm{E}(X(t+\tau)^2) = R(0)^2$. (Recordemos también que $R(0) = \mathrm{E}(X(t)^2) \geq 0$.) ■

Ejemplo 4.1

Veamos estas propiedades mediante el ejemplo que se muestra en la figura 5. En la columna de la derecha podéis ver una realización de un proceso $X(t)$. En la columna de la izquierda podéis ver la función de autocorrelación de este proceso.

Figura 5. Tres funciones de autocorrelación y tres realizaciones de $X(t)$

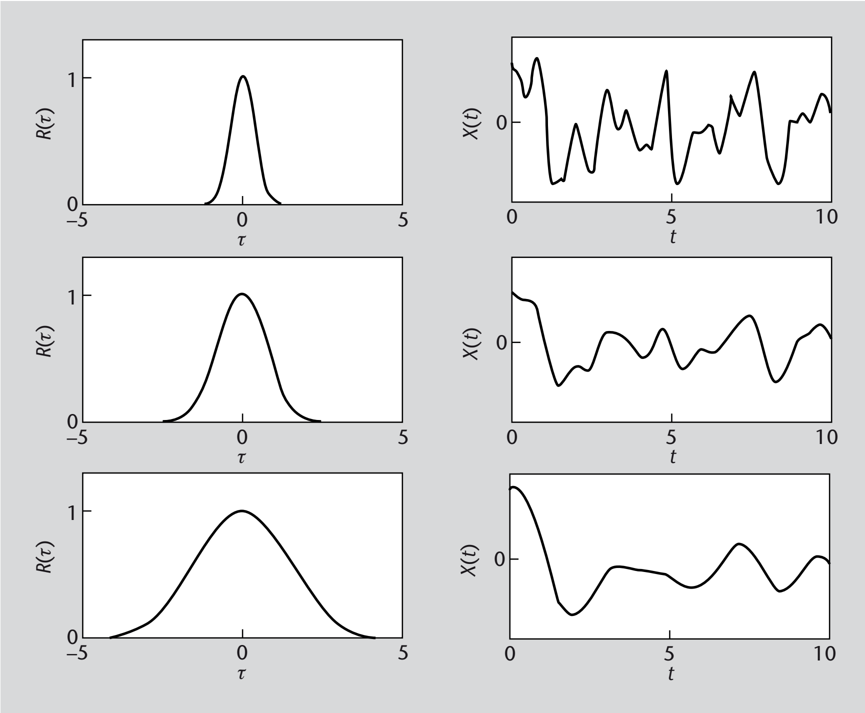


Figura 5

En la columna izquierda tenemos diferentes funciones de autocorrelación $R(\tau)$. En la columna de la derecha una realización del proceso $X(t)$ para cada una. Podemos observar las tres propiedades de $R(\tau)$ que hemos mencionado en la proposición 4.1.

Fijaos, en primer lugar, en que para todos los casos la función de autocorrelación es par, es decir, tiene simetría respecto al eje y. Como habíamos visto en la primera propiedad de la proposición 4.1, $R(\tau) = R(-\tau)$.

Veamos la segunda propiedad, que nos dice que $R(\tau)$ nos da una idea de la variación temporal del proceso. Vemos que si R disminuye lentamente, como es el caso de la tercera realización de la figura, $R(0) - R(\tau)$ es pequeño y el proceso tiende a variar poco al transcurrir el tiempo. Es un hecho intuitivo, ya que R mide la correlación entre valores del proceso en instantes diferentes. Si esta correlación no disminuye, $X(t + \tau)$ tiende a tener valores próximos a $X(t)$. Pero si R disminuye rápidamente, como podéis ver en la primera realización de la figura, se pierde la correlación y el proceso en $t + \tau$ ya ha "olvidado" el valor que tomaba en t. En definitiva, cuanto menos varía $R(\tau)$, más suaves son las fluctuaciones de las realizaciones del proceso estocástico.

En la figura 5 podéis ver también la tercera propiedad: $R(\tau)$ es máxima en $\tau = 0$. Observad que $R(\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t + \tau))$ mide la correlación entre la función $X(t)$ y la misma función desplazada $X(t + \tau)$. El máximo de esta correlación lo tenemos, por lo tanto, cuando no hay desplazamiento y comparamos la función con ella misma.

En la segunda propiedad hablábamos de la variación del proceso $X(t)$ en tiempo, y hemos visto que esta variación se puede evaluar según la forma que tiene $R(\tau)$. Otra manera de ver cómo varía el proceso con el tiempo es mediante el contenido frecuencial. Si el proceso efectúa cambios rápidos en el tiempo, habrá un contenido elevado en las frecuencias altas. Si, en cambio, el proceso fluctúa poco en el tiempo, sabemos que su contenido frecuencial predominarán las frecuencias bajas. La magnitud que se utiliza para medirlo es la **densidad espectral de potencia**.

Transformación de Fourier

Recordamos la definición de la transformada de Fourier. Transformada directa (paso de tiempo en frecuencia):

$$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau.$$

Transformada inversa (paso de frecuencia a tiempo):

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{j2\pi f\tau} df.$$

Definición 4.1. La **densidad espectral de potencia** $S(f)$ de un proceso estocástico **estacionario** $X(t)$ es la transformada de Fourier de su función de autocorrelación:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \tag{6}$$

Con la transformación inversa de la ecuación (6) expresamos R en función de S:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df. \tag{7}$$

Podemos relacionar la potencia media del proceso, que representaremos por Pot, con el espectro de potencia $S(f)$. Tenemos* que $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = R(0)$. Así, ponemos $\tau = 0$ en la ecuación (7) y obtenemos $R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, df$. Llegamos, por tanto, al resultado:

* Tal como habíamos visto en el apartado 2 del módulo "Caracterización estadística y parámetros de los procesos estocásticos".

$$\mathrm{Pot} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, df. \tag{8}$$

Potencia de un proceso estacionario

En un proceso estacionario la potencia no depende de t. En efecto, $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = \mathrm{E}(X(t)X(t)) = R(t,t) = R(0)$, que es una constante.

Esto justifica el nombre de $S(f)$, ya que al ser integrada sobre todas las frecuencias nos da la potencia.

Es fácil ver que al ser R (la función de autocorrelación) una función real y par, la densidad espectral de potencia, S, también es real y par:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)(\cos 2\pi f\tau - j \sin 2\pi f\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f\tau\, d\tau,$$

ya que $R(\tau)\sin 2\pi f\tau$ es una función impar y su integral se anula. Ahora se ve claramente que $S(f)$ es real y que $S(-f) = S(f)$. Finalmente, podemos escribir:

$$S(f) = 2\int_{0}^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f\tau\, d\tau. \tag{9}$$

Veamos un ejemplo en el que aplicaremos todos estos conceptos.

Ejemplo 4.2

Un proceso tiene autocorrelación:

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\delta}, & |\tau| \le \delta, \\ 0, & |\tau| > \delta. \end{cases}$$

Se trata de calcular el espectro de potencia y observar gráficamente que cuanto más rápidamente decae R, más contenido hay de altas frecuencias, tal como hemos visto en la figura 5:

$$S(f) = \int_{-\delta}^{\delta} \left(1 - \frac{|\tau|}{\delta}\right) \cos 2\pi f \tau d\tau = 2 \int_{0}^{\delta} \left(1 - \frac{\tau}{\delta}\right) \cos 2\pi f \tau d\tau = \frac{1 - \cos 2\pi f \delta}{2\pi^2 f^2 \delta}.$$

Cuanto más pequeño es δ, más dispersa queda la función S.

Figura 6. La función de autocorrelación $R(\tau)$ para diferentes valores de δ al lado de los espectros de potencia correspondientes. Cuanto más lentamente decae $R(\tau)$, más concentrada está la función $S(f)$

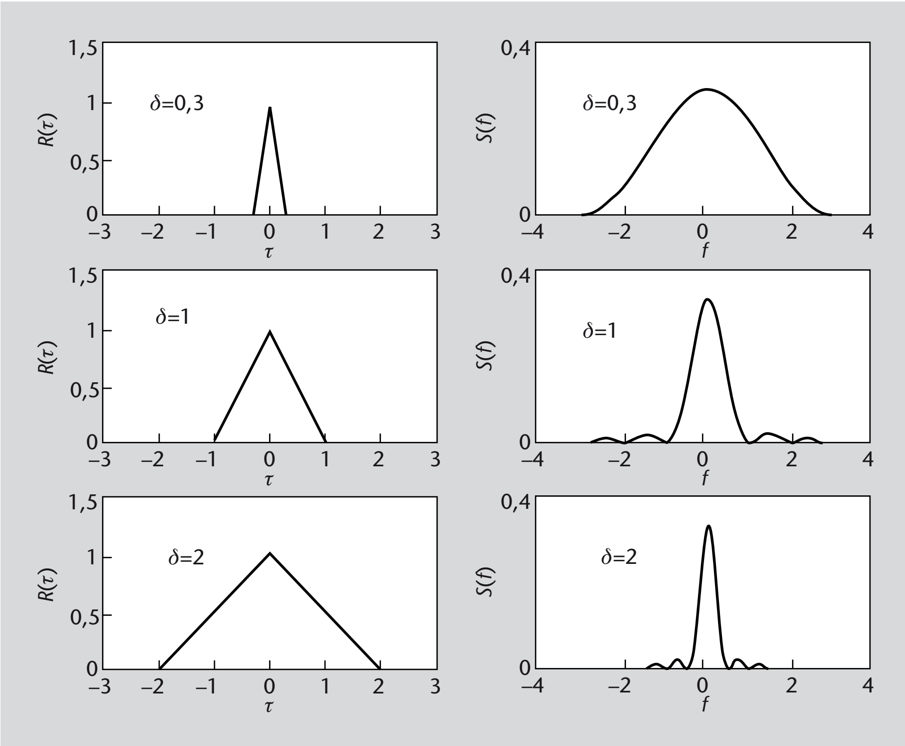


Figura 6

Cuando la función de autocorrelación decae muy rápidamente, significa que la señal en tiempo fluctúa mucho y que tendremos contenido frecuencial a altas frecuencias. Cuando la función de autocorrelación varía poco, el proceso en tiempo también lo hace y eso se traduce en frecuencias bajas en torno al cero.

Resumen

Un proceso estocástico es estacionario cuando su estadística es invariante a lo largo del tiempo. Podemos diferenciar entre los dos tipos siguientes:

- **Proceso estocástico estacionario en sentido estricto**: si los vectores aleatorios $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ y $(X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \ldots, X(t_n+\tau))$ tienen la misma distribución de probabilidades. Es decir, aunque nos desplacemos un intervalo τ en el eje del tiempo, continuamos viendo los mismos parámetros estadísticos.

- **Proceso estocástico estacionario en sentido amplio**: si su función de valor medio es constante y su función de autocorrelación depende solo de la diferencia del tiempo. Es decir, $m(t) = m$ y $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$.

Observad que estas dos condiciones que se dan en los procesos estacionarios en sentido amplio también se dan en los procesos estacionarios en sentido estricto.

Como ejemplo, hemos comprobado que, en ciertos casos, las oscilaciones aleatorias que hemos ido viendo en diferentes módulos son un ejemplo de proceso estocástico estacionario en sentido amplio y también en sentido estricto.

Una variante del concepto de estacionariedad es la **cicloestacionaridad**. Este es el caso de los procesos estocásticos, que son invariantes solo bajo determinados desplazamientos, que son múltiples de un periodo concreto T. En estos casos podemos diferenciar entre lo siguiente:

- **Procesos cicloestacionarios en sentido estricto**: si existe un número T tal que para todo $n \geq 1$ y para toda elección de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ los vectores aleatorios $(X(t_1+kT), X(t_2+xkT), \ldots, X(t_n+kT))$ y $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ tienen la misma distribución de probabilidad para todo k entero.

- **Procesos cicloestacionarios en sentido amplio**: si existe una constante T tal que para todo k entero su función de valor medio verifica $m(t+kT) = m(t)$ y su autocorrelación verifica $R(t_1 + kT, t_2 + kT) = R(t_1, t_2)$.

En el caso de los procesos estocásticos estacionarios, la función de autocorrelación $R(t_1, t_2)$ depende únicamente de la diferencia de tiempo $\tau = t_2 - t_1$. Bajo estas condiciones $R(\tau)$ cumple las propiedades siguientes:

- $R(\tau)$ es una función par.

- $R(\tau)$ nos da una idea de cómo varía el proceso $X(t)$ en el tiempo.
- $R(\tau)$ es máxima en $\tau = 0$.

Finalmente, hemos definido una nueva función que nos permite evaluar cómo varían los procesos en tiempo y hemos definido el **espectro de potencia** de un proceso estocástico aleatorio como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \tag{10}$$

Con esta transformación pasamos del dominio tiempo al dominio frecuencia. De la misma manera, con la transformada de Fourier inversa del espectro de potencia, podemos obtener la función de autocorrelación del proceso:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df. \tag{11}$$

Actividades

1. ¿Cuál de los parámetros estadísticos siguientes (valor medio y función de autocorrelación) corresponde a procesos estacionarios en sentido amplio?

a) $m(t) = 1$, $R(t_1, t_2) = e^{-|t_1-t_2|} + 3$.

b) $m(t) = t$, $R(t_1, t_2) = \cos(t_2 - t_1) + t_1 t_2$.

c) $m(t) = 2$, $R(t_1, t_2) = t_1 + t_2 + 5$.

d) $m(t) = 0$, $R(t_1, t_2) = t_2^2 - t_1^2$.

Indicación: recordad que una manera de asegurar que la función de autocorrelación solo depende de la diferencia de tiempo es escribir $R(t, t + \tau)$ y ver que no depende de t.

2. Considerad una oscilación estacionaria $X(t) = A\cos t + B\sin t$ donde (A, B) es una variable bidimensional uniforme en una región $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$. Decid si $X(t)$ tiene algún tipo de estacionariedad en los casos siguientes:

a) $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

b) $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

c) $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Indicación

Podéis ver en el apartado 2 los criterios de estacionariedad para oscilaciones aleatorias.

3. Considerad que $X(t)$ es un proceso estacionario en sentido estricto. Suponed que $X(0)$ es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda = 2$ y que $X(0)$ y $X(1)$ son independientes. Calculad o decid si nos falta información para calcularlo:

a) $\mathrm{E}(X(2))$.

b) $\mathrm{E}(X(3)^2)$.

c) $\mathrm{E}(X(1)X(3))$.

d) $\mathrm{Cov}(X(1), X(2))$.

e) $\mathrm{E}(X(4)X(5))$.

4. Considerad que $X(t)$ es un proceso estacionario en sentido amplio tal que $m(t) = 0$ y $R(\tau) = 2e^{-|\tau|}$.

a) ¿Cuánto vale la potencia de este proceso?

b) ¿Cuánto vale $\mathrm{E}((X(2) - X(1))^2)$?

c) Calculad el espectro de potencia $S(f)$ de este proceso.

5. Considerad los dos procesos estocásticos siguientes:

- $X(t)$ con valor medio $m_X(t) = 2^{-t}$ y autocorrelación $R_X(t_1, t_2) = \dfrac{1}{1 + (t_1 - t_2)^2}$.
- $Y(t)$ con valor medio $m_Y(t) = 0$ y autocorrelación $R_Y(t_1, t_2) = \dfrac{1}{1 + (t_1 - t_2)^2}$.

a) ¿Son estacionarios $X(t)$ o $Y(t)$?

b) Definimos un nuevo proceso $Z(t) = X(t)X(t + 1)$. Demostrad que la función de valor medio de $Z(t)$, $m_Z(t)$ es constante.

c) Definimos las variables aleatorias $A = X(1) - X(0)$ y $B = X(2)$. Calculad las esperanzas y varianzas, y también $\mathrm{Cov}(A, B)$.

d) La variación del proceso $Y(t)$ la podemos estudiar a partir de la variable aleatoria $V_a = Y(a) - Y(0)$ donde $a > 0$. Calculad $\mathrm{E}(V_a^2)$ y demostrad que el resultado es una función creciente de a.

e) Calculad la densidad espectral de potencia $S_Y(f)$ del proceso $Y(t)$.
Indicación: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{x^2 + \beta^2}dx = \frac{\pi e^{-\beta|\alpha|}}{2\beta}$.

6. Un proceso tiene función de valor medio $m(t) = \alpha + \beta t$ y función de autocorrelación $R(t_1, t_2) = \cos(\alpha t_1 + (\alpha - 2)t_2)$. Determinad los valores de las constantes α y β para que el proceso sea estacionario en sentido amplio.

7. Un proceso estacionario $Y(t)$ tiene valor medio $m_Y(t) = 0$ y autocorrelación $R_Y(t_1, t_2) = e^{-(t_1-t_2)^2}$.

a) Para estudiar su variación definimos la variable aleatoria $V_a = Y(a) - Y(0)$ donde $a > 0$. Calculad $\mathrm{E}(V_a^2)$ y demostrad que el resultado es una función creciente de a.

b) Calculad la densidad espectral de potencia $S_Y(f)$ del proceso $Y(t)$.
Indicación: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\alpha x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$.

8. Un proceso tiene función de valor medio $m(t) = e^{-\kappa t}$ y función de autocovarianza $C(t_1,t_2) = e^{-|t_2-t_1|}$.

a) Para el caso $\kappa = 1$: calculad la esperanza y la varianza de la variable aleatoria $X(1)$.

b) ¿Hay algún valor de la constante κ tal que el proceso sea estacionario en sentido amplio?

c) (En este apartado *b* sustituid κ por el valor hallado en el apartado *c*.) Considerad el proceso $Z(t) = X(t+a) - X(t)$ con $a > 0$. Calculad la potencia de $Z(t)$ y demostrad que esta es una función creciente de a.

9. Un proceso tiene función de valor medio $m(t) = \cos^2\alpha + t\sin^2\alpha$ y función de autocovarianza $C(t_1,t_2) = 1 + \cos(\pi(t_2 - t_1))$.

a) Encontrad los valores de α tales que el proceso sea estacionario en sentido amplio.

b) Tomad α como en el apartado anterior y calculad la esperanza y la varianza de la variable $Z = \frac{1}{2}(X(0) + X(1))$.

10. El voltaje en un punto de una línea eléctrica está determinado por un proceso estocástico gaussiano $X(t)$ de valor medio $m(t) = 1 + a\cos t$ y autocovarianza $C(t_1,t_2) = \cos(t_1 + bt_2)$, donde a y b son dos constantes.

a) Determinad a y b para que el proceso sea estacionario en sentido amplio. Y para que lo sea en sentido estricto.

b) Para el caso $a = b = 1$, encontrad la potencia del proceso y determinad en qué instantes es máxima.

11. Un proceso tiene función de valor medio $m(t) = \alpha t + \beta(1-t)$ y función de autocovarianza $C(t_1,t_2) = \cos^2(\pi(2t_1 + \beta t_2))$.

a) Encontrad los valores de α y β tales que el proceso sea estacionario en sentido amplio.

b) Tomad α y β como en el apartado anterior. Si $Z = X(\frac{1}{4}) - X(0)$, calculad las esperanzas de Z y de Z^2.

12. La señal eléctrica en un punto de una línea está determinada por un proceso $X(t)$, estacionario, con valor medio 10 y de potencia 100. En otro punto de la línea la señal que aparece es $Y(t) = X(t) + S(t)$ donde $S(t)$ es el ruido añadido por la línea, independiente del proceso $X(t)$, con valor medio constante μ y potencia 15.

a) Se mide la potencia de $Y(t)$ y da 165. ¿Cuánto vale μ?

b) Demostrad que si $S(t)$ es estacionario en sentido amplio, entonces $Y(t)$ también lo es.

13. Un proceso tiene función de valor medio $m(t) = \alpha(t+1) + \beta(1-t) + \gamma(2t-1)$ y función de autocorrelación $R(t_1,t_2) = \dfrac{1}{\beta + (\alpha t_1 + \gamma t_2)^2}$.

a) Encontrad los valores de las constantes α, β y γ tales que el proceso es estacionario en sentido amplio, con potencia igual a 2.

b) Tomad α, β y γ como en el apartado anterior. Si $Z = X(2) - X(0)$, calculad la varianza de Z.

14. Un segmento de una red de comunicaciones añade ruido a la señal transmitida de manera que si esta es originalmente $X(t)$, lo que se transmite es $Y(t) = X(t) + N(t)$ donde $N(t)$ tiene valor medio cero y está correlacionado con $X(t)$ de manera que $\mathrm{E}(X(t)N(t)) = \epsilon\sqrt{\mathrm{Pot}_X}$, donde ϵ es una constante y Pot_X es la potencia del proceso $X(t)$.

a) Determinad la relación entre la potencia de la señal original $X(t)$ y la de la señal presente $Y(t)$.

b) Encontrad ϵ y la potencia de $N(t)$ sabiendo que si la potencia de $X(t)$ vale 2, la de $Y(t)$ vale $2,78$, y si la potencia de $X(t)$ vale 4, la de $Y(t)$ vale $4,90$.

15. Una señal de comunicación $X(t)$ es un proceso estacionario con valor medio $m_X(t) = \mu$ y autocorrelación $R_X(t, t+\tau) = \varphi(\tau)$ (dondeè μ es una constante y $\varphi(\tau)$ una función). A causa de la modulación, aparece el proceso $Y(t) = \cos(2\pi f_0 t)X(t)$ donde la constante f_0 es la frecuencia de modulación. Leed las definiciones de cicloestacionariedad (3.1 y 3.2) y demostrad que, si bien no es estacionario, $Y(t)$ es cicloestacionario en sentido amplio.

16. Un proceso tiene función de valor medio $m(t) = \cos(at) + b$ y función de autocovarianza $C(t_1, t_2) = \cos^2(ct_1 + \pi t_2)$.

a) Encontrad los valores de las constantes a, b, c tales que el proceso sea estacionario en sentido amplio, con potencia igual a 5.

b) Ahora tomad $a = c = \pi$, $b = 2$. Calculad la esperanza y la varianza de $X(0)$ y de $X(1)$ y también la covarianza. Calculad también la varianza de $Y = X(0) - X(1)$ y decid qué se puede decir de la relación entre $X(0)$ y $X(1)$ a partir de este valor.

17. Un canal de comunicación transmite una señal $X(t)$ estacionaria, con valor medio 0 y potencia 12. En la salida encontramos $Y(t) = X(t)+N(t)$ donde $N(t)$ es el ruido introducido por el canal. Este ruido está correlacionado con $X(t)$ de manera que $N(t) = (1 - e^{-A})X(t)$ donde A es una variable aleatoria exponencial de esperanza 1, independiente de $X(t)$.

a) Demostrad que si A es una variable aleatoria exponencial de parametro λ, y α es una constante no negativa: $\mathrm{E}(e^{-\alpha A}) = \dfrac{\lambda}{\lambda + \alpha}$.

b) Determinad la potencia de la señal final $Y(t)$.

c) Considerad ahora que a $X(t)$ le añadimos un ruido que tiene la misma potencia que el ruido anterior pero es independiente de $X(t)$. ¿Cuál es ahora la potencia de $Y(t)$?

18. Una señal de comunicación $X(t)$ es un proceso estacionario con valor medio $m_X(t) = \mu$ y autocorrelación $R_X(t, t + \tau) = \varphi(\tau)$ (donde μ es una constante y $\varphi(\tau)$ una función).

Demostrad que el proceso $Y(t) = X(t) + X(t + a)$, donde a es una constante, es también estacionario en sentido amplio y encontrad su valor medio y la autocorrelación expresados a partir de μ y $\varphi(\tau)$.

Solucionario

1. Debemos comprobar que $m(t)$ es constante y $R(t, t+\tau)$ depende solo de τ.

a) Sí, ya que $R(t, t+\tau) = e^{-|\tau|} + 3$.

b) No, ya que $m(t) = t$ no es constante.

c) No, ya que $R(t, t+\tau) = 2t + \tau + 1$ depende de t.

d) No, ya que $R(t, t+\tau) = (t+\tau)^2 - t^2 = 2t\tau + \tau^2$ depende de t.

2. Para ser estacionario en sentido estricto es necesario que la variable bidimensional (A, B) tenga simetría circular. En los tres ejemplos la función de densidad conjunta es constante sobre $\mathcal{D}$ pero solo tenemos simetría circular en el tercer caso ($x^2 + y^2 \leq 1$ define un círculo de radio 1 centrado en el origen). Así, el tercer caso corresponde a un proceso estacionario en sentido estricto y los dos primeros no.

El tercero también es estacionario en sentido amplio, ya que lo es en sentido estricto (proposición 1.1). Para los otros dos hemos de comprobar las condiciones ($\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$, $\rho = 0$).

Primer caso: $\mathcal{D}$ es un cuadrado de área 1. $f_A(a) = \int_0^1 1 \cdot db = 1$ para $0 \leq a \leq 1$. Así A es uniforme en $[0,1]$ y, por tanto, $\mathrm{E}(A) = \frac{1}{2}$. El proceso no es estacionario en sentido amplio.

Segundo caso: $\mathcal{D}$ es un cuadrado de área 4. $f_A(a) = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} db = \frac{1}{2}$ para $-1 \leq a \leq 1$. $f_B(b) = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} da = \frac{1}{2}$ para $-1 \leq b \leq 1$. Entonces A y B son uniformes en $[-1,1]$ y, por lo tanto, $\mathrm{E}(A) = 0$, $\mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ (A y B tienen la misma densidad) y $\mathrm{E}(AB) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ab\frac{1}{4} dadb = 0$, con lo que $\mathrm{Cov}(A, B) = 0$. Así, el proceso es estacionario en sentido amplio.

3. Si el proceso es estacionario en sentido estricto, $X(t)$ tiene la misma función de densidad para todo t. Lo mismo sucede con la variable bidimensional $(X(t), X(t+1))$. Así, para todo t, $X(t)$ es $Exp(2)$ y $X(t)$ y $X(t+1)$ son independientes. Recordemos también que para una $Exp(\lambda)$ la esperanza vale $\frac{1}{\lambda}$ y la varianza $\frac{1}{\lambda^2}$.

Entonces: $\mathrm{E}(X(2)) = \frac{1}{2}$. $\mathrm{E}(X(3)^2) = \mathrm{Var}(X(3)) + \mathrm{E}(X(3))^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. $\mathrm{E}(X(1)X(3))$ no se puede determinar, ya que no tenemos información sobre lo que pasa a distancia temporal 2. $\mathrm{Cov}(X(1), X(2)) = 0$, ya que $X(1)$ y $X(2)$ también son independientes. $\mathrm{E}(X(4)X(5)) = \mathrm{Cov}(X(4), X(5)) + \mathrm{E}(X(4))\,\mathrm{E}(X(5)) = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

4. Tenemos que $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1) = 2e^{-|t_2 - t_1|}$.

a) La potencia es $R(t,t)$ y en el caso estacionario vale $R(t-t) = R(0)$. Así, la potencia vale $2e^{-|0|} = 2$.

b) $\mathrm{E}((X(2)-X(1))^2) = \mathrm{E}(X(1)^2+X(2)^2-2X(1)X(2)) = \mathrm{E}(X(1)^2)+\mathrm{E}(X(2)^2)-2E(X(1)X(2)) = R(0) + R(0) - 2R(1) = 2(R(0) - R(1)) = 2(2 - 2e^{-1}) = 4(1 - e^{-1})$.

c) $S(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)\,d\tau = 2\int_0^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)\,d\tau = 2\int_0^{\infty} 2e^{-\tau}\cos(2\pi f\tau)\,d\tau =$
$4 \left.\dfrac{e^{-\tau}(-\cos(2\pi f\tau) + 2\pi f \sin(2\pi f\tau))}{1 + (2\pi f)^2}\right|_{\tau=0}^{\tau=\infty} = \dfrac{4}{1 + 4\pi^2 f^2}$.

5. a) $X(t)$ no es estacionario, ya que $m_X(t)$ depende de t. $Y(t)$ es estacionario en sentido amplio, ya que $m_Y(t)$ es constante y $R_Y(t_1, t_2)$ depende solo de la diferencia de tiempo: $R_Y(t, t+\tau) = \dfrac{1}{1+\tau^2}$.

b) $m_Z(t) = \mathrm{E}(Z(t)) = \mathrm{E}(X(t)X(t+1)) = R_X(t, t+1) = \dfrac{1}{1 + (t - (t+1))^2} = \dfrac{1}{2}$.

c) $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(X(1) - X(0)) = \mathrm{E}(X(1)) - \mathrm{E}(X(0)) = m_X(1) - m_X(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

$\mathrm{E}(B) = \mathrm{E}(X(2)) = m_X(2) = \frac{1}{4}$.

$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}((X(1)-X(0))^2) = \mathrm{E}(X(1)^2)+\mathrm{E}(X(0)^2)-2E(X(1)X(0)) = R_X(1,1)+R_X(0,0)-2R_X(1,0) = 1 + 1 - 2\frac{1}{2} = 1$.

$\mathrm{E}(B^2) = \mathrm{E}(X(2)^2) = \mathrm{E}(X(2)X(2)) = R_X(2,2) = \frac{1}{1+(2-2)^2} = 1$.

$\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}((X(1) - X(0))X(2)) = \mathrm{E}(X(1)X(2)) - \mathrm{E}(X(0)X(2)) = R_X(1,2) - R_X(0,2) = \frac{1}{1+(1-2)^2} - \frac{1}{1+(0-2)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$.

$\mathrm{Var}(A) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(A)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$\mathrm{Var}(B) = \mathrm{E}(B^2) - \mathrm{E}(B)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

$\mathrm{Cov}(A, B) = \mathrm{E}(AB) - \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = \frac{3}{10} - (-\frac{1}{2})\frac{1}{4} = \frac{17}{40}$.

d) $\mathrm{E}(V_a^2) = \mathrm{E}((Y(a) - Y(0))^2) = \mathrm{E}(Y(a)^2) + \mathrm{E}(Y(0)^2) - 2E(Y(a)Y(0)) = R_Y(a, a) + R_Y(0, 0) - 2R_Y(a, 0) = \dfrac{1}{1 + (a - a)^2} + \dfrac{1}{1 + (0 - 0)^2} - 2\dfrac{1}{1 + (a - 0)^2} = \dfrac{2a^2}{1 + a^2}$.

Podemos comprobar que es creciente observando que su derivada es $\dfrac{4a}{(1 + a^2)^2} > 0$.

e) $Y(t)$ es un proceso estacionario con $R_Y(\tau) = \dfrac{1}{1 + \tau^2}$.

$S_Y(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)\cos 2\pi f\tau\, d\tau = 2\int_0^{\infty} R_Y(\tau)\cos 2\pi f\tau\, d\tau$
$= 2\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \tau^2}\cos 2\pi f\tau\, d\tau = \pi e^{-2\pi|f|}$.

6. $m(t)$ no debe depender de t, de manera que necesariamente $\beta = 0$.

$R(t_1, t_2)$ debe depender solo de la diferencia de tiempo. Es decir, $R(t, t + \tau) = \cos(\alpha t + (\alpha - 2)(t + \tau)) = \cos(2(\alpha - 1)t + (\alpha - 2)\tau)$ no ha de depender de t. Así, necesariamente $\alpha = 1$.

Tomando $\alpha = 1, \beta = 0$ nos queda un proceso estacionario en sentido amplio con $m(t) = 1$ y $R(t, t + \tau) = \cos\tau$.

7. a) $\mathrm{E}(V_a^2) = \mathrm{E}((Y(a) - Y(0))^2) = \mathrm{E}(Y(a)^2) + \mathrm{E}(Y(0)^2) - 2E(Y(a)Y(0)) = R_Y(a, a) + R_Y(0, 0) - 2R_Y(a, 0) = e^{-(a-a)^2} + e^{-(0-0)^2} - 2e^{-(a-0)^2} = 2 - 2e^{-a^2}$.

Podemos comprobar que es creciente observando que su derivada es $4ae^{-a^2} > 0$.

b) $Y(t)$ es un proceso estacionario con $R_Y(\tau) = e^{-\tau^2}$.

$S_Y(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)\cos 2\pi f\tau\, d\tau = 2\int_0^{\infty} R_Y(\tau)\cos 2\pi f\tau\, d\tau$
$= 2\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\tau^2}\cos 2\pi f\tau\, d\tau = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2}$.

8. a) $\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = e^{-1}$. $\mathrm{Var}(X(1)) = C(1, 1) = e^0 = 1$.

b) $m(t)$ no debe depender de t, de manera que necesariamente $\kappa = 0$. $R(t_1, t_2)$ debe depender solo de la diferencia de tiempo, hecho que ya sucede. Así, el proceso es estacionario en sentido amplio cuando $\kappa = 0$.

c) Tenemos $m(t) = 1$ y $R(t_1, t_2) = C(t_1, t_2) + m(t_1)m(t_2) = e^{-|t_2 - t_1|} + 1$.

La potencia de $Z(t)$ vale $\mathrm{Pot}_Z = \mathrm{E}(Z(t)^2) = \mathrm{E}((X(t + a) - X(t))^2) = \mathrm{E}(X(t + a)^2) + \mathrm{E}(X(t)^2) - 2E(X(t + a)X(t)) = R(t + a, t + a) + R(t, t) - 2R(t + a, t) = (e^{-0} + 1) + (e^{-0} + 1) - 2(e^{-a} + 1) = 2 - 2e^{-a}$. Es creciente, ya que su derivada vale $2e^{-a} > 0$.

9.

a) $m(t)$ debe ser constante y R (o C) depender de la diferencia de tiempo. La segunda condición ya se verifica. Para la primera es necesario $\sin\alpha = 0$, que implica $\alpha = k\pi$ donde k es cualquier entero. En este caso siempre queda $m(t) = 1$.

b) Observamos que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t) = 1$ y $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = R(t_1, t_2) = C(t_1, t_2) + m(t_1)m(t_2) = 2 + \cos(\pi(t_2 - t_1))$.

$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}(X(0) + X(1))\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{E}(X(0)) + \mathrm{E}(X(1))) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$.

$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}(\frac{1}{4}(X(0) + X(1))^2) = \frac{1}{4}(\mathrm{E}(X(0)^2) + \mathrm{E}(X(1)^2) + 2E(X(0)X(1))) = \frac{1}{4}(R(0, 0) + R(1, 1) + 2R(0, 1)) = \frac{1}{4}(3 + 3 + 2 \cdot 1) = 2$.

$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)^2 = 1$.

10. a) $m(t)$ debe ser constante, y entonces $a = 0$. $C(t, t+\tau) = \cos((1+b)t + b\tau)$ no debe depender de t, y entonces $b = -1$. Así, el proceso es estacionario en sentido amplio cuando $a = 0$ y $b = -1$. En este caso también será estacionario en sentido estricto, ya que el proceso es gaussiano.

b) $\text{Pot} = R(t,t) = C(t,t) + m(t)^2 = \cos(2t) + (1+\cos t)^2 = 3\cos^2 t - 2\cos t$.

Su derivada vale $2\sin t(1 - 3\cos t)$ y se anula para $t = k\pi$ con k entero, donde tenemos máximos locales, y para los tiempos con $\cos t = \frac{1}{3}$, donde tenemos mínimos locales. Los máximos se dan, por tanto, en $t = k\pi$, y la potencia vale 1 para k par y 5 para k impar.

11. a) $m(t)$ debe ser constante y R (o C) depender de la diferencia de tiempo. Dado que $m(t) = \beta + (\alpha - \beta)t$, debe ser $\alpha = \beta$. Si ponemos $C(t, t+\tau) = \cos^2(\pi((2+\beta)t + \beta\tau))$, debe ser $\beta = -2$. Entonces, $\alpha = \beta = -2$, $m(t) = -2$ y $C(t_1, t_2) = \cos^2(2\pi(t_2 - t_1))$.

b) Observamos que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t) = -2$ y $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = R(t_1,t_2) = C(t_1,t_2) + m(t_1)m(t_2) = 4 + \cos^2(2\pi(t_2 - t_1))$.

$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X(\frac{1}{4}) - X(0)) = \mathrm{E}(X(\frac{1}{4})) - \mathrm{E}(X(0))) = -2 - (-2) = 0$.

$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}((X(\frac{1}{4}) - X(0))^2) = \mathrm{E}(X(\frac{1}{4})^2) + \mathrm{E}(X(0)^2) - 2E(X(0)X(\frac{1}{4})) = R(\frac{1}{4}) + R(0,0) - 2R(0, \frac{1}{4}) = 5 + 5 - 2 \cdot 4 = 2$.

12. a) $\text{Pot}_Y = \mathrm{E}(Y(t)^2) = \mathrm{E}((X(t)+S(t))^2) = \mathrm{E}(X(t)^2 + S(t)^2 + 2X(t)S(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) + \mathrm{E}(S(t)^2) + 2E(X(t))\,\mathrm{E}(S(t)) = \text{Pot}_X + \text{Pot}_Y + 2m_X m_Y$.

Así, $165 = 100 + 15 + 2 \cdot 10\mu$, y entonces $\mu = 2{,}5$.

b) $m_Y(t) = \mathrm{E}(X(t)) + \mathrm{E}(S(t)) = 10 + \mu$, es constante.

$R_Y(t_1,t_2) = \mathrm{E}((X(t_1)+S(t_1))(X(t_2)+S(t_2)) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) + \mathrm{E}(S(t_1)S(t_2)) + \mathrm{E}(X(t_1))\,\mathrm{E}(S(t_2)) + \mathrm{E}(S(t_1))\,\mathrm{E}(X(t_2))$.

Entonces $R_Y(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) + R_S(t_1,t_2) + 20\mu$. Como X y S son estacionarios, R_X y R_S dependen solo de la diferencia de tiempo. Por lo tanto, R_Y depende solo de la diferencia de tiempo y el proceso Y es estacionario.

13. a) $m(t)$ debe ser constante y $R(t_1,t_2)$ depender solo de la diferencia de tiempo. Como $m(t) = \alpha + \beta - \gamma + (\alpha - \beta + 2\gamma)t$, debe ser $\alpha - \beta + 2\gamma = 0$. Si ponemos $R(t, t+\tau) = \dfrac{1}{\beta + ((\alpha+\gamma)t + \gamma\tau)^2}$, debe ser $\alpha + \gamma = 0$. Finalmente, la potencia es (teniendo en cuenta la condición anterior) $R(t,t) = \dfrac{1}{\beta} = 2$, y entonces $\beta = \dfrac{1}{2}$ Entonces, $\alpha = -\dfrac{1}{2}, \beta = \gamma = \dfrac{1}{2}$.

b) Observamos que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t) = -\dfrac{1}{2}$ y $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = R(t_1,t_2) = \dfrac{4}{2 + (t_2 - t_1)^2}$.

$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X(2) - X(0)) = \mathrm{E}(X(2)) - \mathrm{E}(X(0))) = -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 0$.

$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}((X(2) - X(0))^2) = \mathrm{E}(X(2)^2) + \mathrm{E}(X(0)^2) - 2E(X(0)X(2)) = R(2,2) + R(0,0) - 2R(0,2) = 2 + 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$. $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)^2 = \frac{8}{3}$.

14. a) $\text{Pot}_Y = \mathrm{E}(Y(t)^2) = \mathrm{E}((X(t)+N(t))^2) = \mathrm{E}(X(t)^2 + N(t)^2 + 2X(t)N(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) + \mathrm{E}(N(t)^2) + 2E(X(t)N(t)) = \text{Pot}_X + \text{Pot}_N + 2\epsilon\sqrt{\text{Pot}_X}$.

b) Así, $2{,}78 = 2 + \text{Pot}_N + 2\epsilon\sqrt{2}$ i $4{,}90 = 4 + \text{Pot}_N + 2\epsilon\sqrt{4}$. La solución del sistema es $\text{Pot}_N = 0{,}49$ y $\epsilon = 0{,}10$.

15. Calculamos los parámetros del proceso $Y(t)$:

$m_Y(t) = \mathrm{E}(Y(t)) = \mathrm{E}(\cos(2\pi f_0 t)X(t)) = \cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{E}(X(t)) = \mu\cos(2\pi f_0 t)$.

$R_Y(t_1,t_2) = \mathrm{E}(Y(t_1)Y(t_2)) = \mathrm{E}(\cos(2\pi f_0 t_1)X(t_1)\cos(2\pi f_0 t_2)X(t_2))$

$= \cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2)\,\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = \varphi(t_2 - t_1)\cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2)$.

$Y(t)$ no es estacionario, ya que $m_Y(t)$ depende de t. Sí que verifica las condiciones de cicloestacionariedad en sentido amplio, tomando $T = \frac{1}{f_0}$. En efecto, para k entero, $m_Y(t+kT) = \mu\cos(2\pi f_0(t + \frac{k}{f_0})) = \mu\cos(2\pi f_0 t + 2\pi k) = \mu\cos(2\pi f_0 t) = m_Y(t)$.

$R_Y(t_1+kT, t_2+kT) = \varphi((t_2+kT)-(t_1+kT))\cos(2\pi f_0(t_1+\frac{k}{f_0}))\cos(2\pi f_0(t_2+\frac{k}{f_0}))$

$= \varphi(t_2-t_1)\cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2) = R_Y(t_1,t_2)$.

16.

a) Como $m(t)=\cos(at)+b$ debe ser constante, $a=0$. Como $C(t,t+\tau)=\cos^2(ct+\pi(t+\tau))$ debe ser independiente de t, $c=-\pi$. Tenemos ahora $m(t)=1+b$ y $C(t_1,t_2)=\cos^2(\pi(t_2-t_1))$. Así $R(t_1,t_2)=C(t_1,t_2)+m(t_1)m(t_2)=\cos^2(\pi(t_2-t_1))+(1+b)^2$. La potencia es $R(t,t)=1+(1+b)^2=5$, y entonces $b=1$ o $b=-3$.

b) Observamos que $\mathrm{E}(X(t))=m(t)=2+\cos\pi t$, $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))=R(t_1,t_2)=\cos^2(\pi(t_1+t_2))+(2+\cos\pi t_1)(2+\cos\pi t_2)$.

Así, $\mathrm{E}(X(0))=m(0)=3$, $\mathrm{E}(X(1))=m(1)=1$, $\mathrm{E}(X(0)^2)=R(0,0)=10$, $\mathrm{E}(X(1)^2)=R(1,1)=2$, $\mathrm{E}(X(0)X(1))=R(0,1)=4$.

Con los datos anteriores, $\mathrm{Var}(X(0))=\mathrm{E}(X(0)^2)-\mathrm{E}(X(0))^2=1$, $\mathrm{Var}(X(1))=\mathrm{E}(X(1)^2)-\mathrm{E}(X(1))^2=1$, $\mathrm{Cov}(X(0),X(1))=\mathrm{E}(X(0)X(1))-\mathrm{E}(X(0))\,\mathrm{E}(X(1))=1$.

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X(0))-\mathrm{E}(X(1))=2$. $\mathrm{E}(Y^2)=\mathrm{E}(X(0)^2+X(1)^2-2X(0)X(1))=10+2-2\cdot 4=4$. $\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\mathrm{E}(Y)^2=0$. Como Y tiene varianza cero, debe ser constante. Entonces podemos asegurar que $X(0)=2+X(1)$.

17.

a) $\mathrm{E}(e^{-\alpha A})=\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha a}\lambda e^{-\lambda a}da=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+\alpha)a}da=\lambda\left.\frac{e^{-(\lambda+\alpha)a}}{-(\lambda+\alpha)}\right|_0^\infty=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}$.

b) $\mathrm{Pot}_Y=\mathrm{E}(Y(t)^2)=\mathrm{E}((X(t)+N(t))^2)=\mathrm{E}((X(t)+(1-e^{-A})X(t))^2)=\mathrm{E}((2-e^{-A})^2X(t)^2)=\mathrm{E}((2-e^{-A})^2)\,\mathrm{E}(X(t)^2)=\mathrm{E}(4-4e^{-A}+e^{-2A})\mathrm{Pot}_X=(4-4\cdot\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+1})12=28$.

c) La potencia del ruido original es:

$$\mathrm{Pot}_N=\mathrm{E}(N(t)^2)=\mathrm{E}((1-e^{-A})^2X(t)^2)=\mathrm{E}(1-2e^{-A}+e^{-2A})\mathrm{Pot}_X=4.$$

Ahora,

$\mathrm{Pot}_Y=\mathrm{E}((X(t)+N(t))^2)=\mathrm{E}(X(t)^2+N(t)^2+2X(t)N(t))=\mathrm{E}(X(t)^2)+\mathrm{E}(N(t)^2)+2E(X(t))\,\mathrm{E}(N(t))=\mathrm{Pot}_X+\mathrm{Pot}_N+0=16$.

18. Observamos que $\mathrm{E}(X(t))=\mu$ y $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))=\varphi(t_2-t_1)$. Calculemos los parámetros del proceso $Y(t)$:

$m_Y(t)=\mathrm{E}(Y(t))=\mathrm{E}(X(t)+X(t+a))=\mathrm{E}(X(t))+\mathrm{E}(X(t+a))=2\mu$.

$R_Y(t,t+\tau)=\mathrm{E}(Y(t)Y(t+\tau))=\mathrm{E}((X(t)+X(t+a))(X(t+\tau)+X(t+\tau+a)))=\mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))+\mathrm{E}(X(t)X(t+\tau+a))+\mathrm{E}(X(t+a)X(t+\tau))+\mathrm{E}\,\mathrm{E}(X(t+a)X(t+\tau+a))=\varphi(\tau)+\varphi(\tau+a)+\varphi(\tau-a)+\varphi(\tau)$.

$Y(t)$ es estacionario en sentido amplio, ya que $m_Y(t)$ es constante y $R_Y(t,t+\tau)$ no depende de t. Su autocorrelación es $R_Y(t,t+\tau)=2\varphi(\tau)+\varphi(\tau+a)+\varphi(\tau-a)$.