Funciones de variables aleatorias

PID_00253299

Ana Escudero
Alícia Miralles
Alícia Vila

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 2 horas

Universitat
Oberta
de Catalunya

Índice

Introducción

En los módulos «Introducción a la probabilidad» y «Variables aleatorias», hemos visto las bases de la teoría de la probabilidad y hemos estudiado las distribuciones de variables aleatorias discretas y continuas más importantes. A partir de esto, nos podemos plantear la pregunta siguiente: ¿qué sucede si modificamos una variable aleatoria X? Imaginad que tenemos un circuito electrónico y que introducimos la variable X como señal de entrada. ¿Qué resultado obtendremos a la salida? ¿Será también una variable aleatoria? ¿Y con qué características? Esto dependerá, en cada caso, de las modificaciones que aplicamos sobre X. Por ejemplo, si hacemos pasar una señal, X, a través de un rectificador de onda, como veremos más adelante, podemos obtener a la salida una señal, Y, con una distribución diferente de X.

En este módulo, hablaremos de una variable aleatoria Y que es función de otra, X, y escribiremos $Y = g(X)$. Este aspecto ya se trata de paso en el módulo «Variables aleatorias». En los subapartados 2.2 y 3.3 de aquel módulo, se ve que para calcular la varianza de una variable aleatoria hay que calcular la esperanza de la variable aleatoria $(X - \mathrm{E}(X))^2$. En este caso, diríamos que $Y = g(X) = (X - \mathrm{E}(X))^2$.

En este módulo, trataremos algunos casos sencillos. Empezaremos viendo, en el apartado 1, cómo podemos aplicar una función sobre una variable aleatoria discreta. En el apartado 2, aplicaremos funciones sobre variables aleatorias continuas. Veremos algunos ejemplos muy concretos de funciones. En el apartado 3, enunciaremos el teorema de la esperanza y veremos cómo lo podemos aplicar.

Objetivos

Los objetivos que tiene que lograr el estudiante una vez trabajados los materiales didácticos de este módulo son:

1. Entender el concepto de función de una variable aleatoria discreta y poner ejemplos.
2. Calcular la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta, transformada mediante una función a partir de la función de probabilidad de la variable aleatoria original.
3. Entender el concepto de función de una variable aleatoria continua y poner ejemplos.
4. Calcular la función de distribución y la función de densidad de una variable aleatoria continua transformada mediante una función, a partir de las funciones de distribución y densidad de la variable aleatoria original.
5. Estudiar tres casos particulares de función sobre una variable aleatoria continua y saber en qué casos se puede aplicar.
6. Comprender el sentido del teorema de la esperanza y sus aplicaciones.

1. Función de una variable aleatoria discreta

Supongamos que X es una variable aleatoria discreta con valores dentro del conjunto $\Omega_X = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. El conjunto Ω_X puede tener un número finito de elementos o una cantidad infinita numerable de elementos. Sea Y una nueva variable aleatoria discreta definida por una función $Y = g(X)$. Nos interesa encontrar la distribución de probabilidades de Y. Supongamos que Y toma valores dentro del conjunto $\Omega_Y = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\}$. Para encontrar la probabilidad de cada uno de estos valores, b_j, tenemos que encontrar la probabilidad del subconjunto de valores de Ω_X, que tienen por imagen b_j. Es decir, $P(Y = b_j) = P(g(X) = b_j)$ y el suceso $g(X) = b_j$ estará formado por los elementos a_i tales que $g(a_i) = b_j$. Lo escribimos de la manera siguiente.

Observación

En el caso de variables aleatorias discretas, podemos trabajar directamente con la función de probabilidad.

Transformación de la función de probabilidad

$$P(Y = b_j) = \sum_{\substack{a_i \\ (g(a_i) = b_j)}} P(X = a_i). \qquad (1)$$

Veamos un ejemplo de ello.

Ejemplo 1.1

Sea X la variable aleatoria discreta que cuenta el número de ceros en un mensaje de tamaño 3 formado por los bits 0 y 1 (elementos del conjunto $\{0, 1\}$). X puede tomar los valores $\{0, 1, 2, 3\}$, puesto que este es el número de ceros que podemos contabilizar en el mensaje. Si la probabilidad de que haya un cero en una posición determinada es $\frac{1}{2}$, $X \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{2})$. Ahora definimos una función g sobre la variable X, $Y = g(X)$ como:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0, \\ 3 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Según hemos definido $g(x)$, Y puede tomar los valores $\{2, 3\}$. Calcular la distribución de probabilidad de la variable Y es dar todas sus probabilidades. Así,

$$P(Y = 2) = P(X = 0) = \binom{3}{0} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

$$P(Y = 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{3}{1} \frac{1}{2^3} + \binom{3}{2} \frac{1}{2^3} + \binom{3}{3} \frac{1}{2^3} = \frac{3 + 3 + 1}{8} = \frac{7}{8}.$$

La suma de las probabilidades $P(Y = 2) + P(Y = 3)$ es igual a 1, puesto que $g(X)$ incluye todos los valores posibles de X y sabemos que la suma de $\sum_i P(X = a_i)$ es igual a 1.

Distribución binomial

Recordad que la distribución binomial que se estudia en el subapartado 2.1.2 del módulo «Variables aleatorias», $\text{Bin}(n, p)$, se caracteriza por el número de experimentos que se llevan a cabo; en este caso, generamos un mensaje de 3 bits, y por la probabilidad de éxito, que aquí consiste en que salga un cero y es $\frac{1}{2}$.

Probabilidades en una distribución binomial

Recordad del subapartado 2.1.2 del módulo «Variables aleatorias» que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ con $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

2. Función de una variable aleatoria continua

Supongamos que X es una variable aleatoria continua con función de densidad conocida $f_X(x)$. Definimos una nueva variable aleatoria $Y = g(X)$, y lo que querríamos es encontrar la función de distribución de Y.

Funciones de distribución y de densidad

En el subapartado 3.1 del módulo «Variables aleatorias» vimos que para las variables aleatorias continuas, podíamos definir la función de distribución, $F_X(x)$, y la función de densidad, $f_X(x)$. La relación entre estas es: $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Según la definición de función de distribución de Y,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y). \tag{2}$$

La ecuación anterior nos dice que para cada valor de y, tenemos que encontrar la probabilidad de todos los valores de X que satisfacen $g(X) \leq y$. Por lo tanto, previamente, hay que determinar cuáles son los valores de X que satisfacen $g(X) \leq y$. Veamos un ejemplo.

Observación

En el caso de variables aleatorias continuas, trabajamos con la función de distribución.

Ejemplo 2.1

Si X sigue una distribución uniforme en el intervalo $(8, 10)$, vimos que sus funciones de densidad y de distribución son:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10-8} = \frac{1}{2} & \text{si } x \in (8, 10), \\ 0 & \text{de otro modo,} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 8, \\ \frac{1}{2}(x-8) & \text{si } 8 \leq x < 10, \\ 1 & \text{si } x \geq 10. \end{cases}$$

Véase también

En el subapartado 3.2.1 del módulo «Variables aleatorias» podéis encontrar la definición de distribución uniforme, $X \sim \mathrm{U}(a, b)$.

Definimos la nueva variable $Y = g(X) = 8/X$ y queremos encontrar qué función de distribución sigue, es decir, queremos encontrar $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{8}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{8}{y}\right),$$

puesto que X e Y son positivas.

La función de distribución de una variable aleatoria se define como $F_X(x) = P(X \leq x)$. Por lo tanto, para poder escribir $F_Y(y)$ en función de $F_X(x)$, haremos el cambio siguiente:

$$P\left(X \geq \frac{8}{y}\right) = 1 - P\left(X < \frac{8}{y}\right).$$

Recordad que si la probabilidad de un suceso es p, la de su complementario es $1 - p$. Continuamos, pues, con los cálculos:

$$F_Y(y) = 1 - P\left(X < \frac{8}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{8}{y}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{y} - 8\right) = 5 - \frac{4}{y}.$$

Observación

En el caso de variable aleatorias continuas, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X < x)$ ya que $\forall x,\ P(X = x) = 0$.

Las igualdades anteriores son válidas cuando X se encuentra entre 8 y 10. Puesto que $y = \frac{8}{x}$, los cálculos son válidos en el intervalo $\frac{8}{10} < y < \frac{8}{8}$, es decir, $0{,}8 < y < 1$.

Figura 1. Función $y = g(x) = \frac{8}{x}$

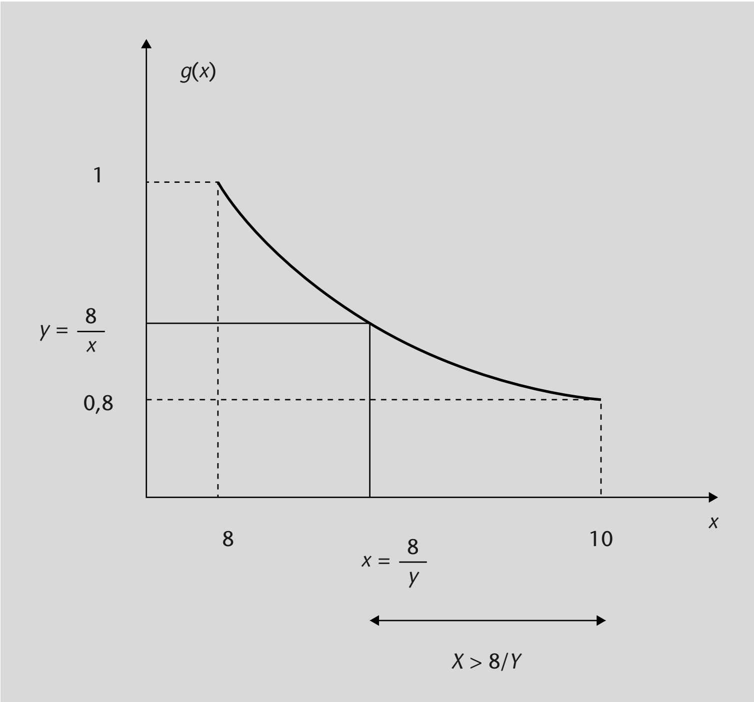


Figura 1

En esta figura, podéis ver cuál es la transformación que hemos aplicado a la variable aleatoria X.

La función de distribución es:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0{,}8, \\ 5 - \frac{4}{y} & \text{si } 0{,}8 \leq y < 1, \\ 1 & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

La función de densidad de Y la encontramos derivando la función de distribución. Tenemos

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{y^2} & \text{si } 0{,}8 < y < 1, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Observamos que Y no sigue una distribución uniforme, puesto que a pesar de que partíamos de una distribución uniforme, X, le hemos aplicado una transformación no lineal.

En el ejemplo anterior, para poder obtener la función de densidad de Y $f_Y(y)$, hemos tenido que calcular previamente la función de distribución $F_Y(y)$. Cuando la función $g(x)$ es derivable y estrictamente creciente o estrictamente decreciente, podemos encontrar la función de densidad de Y directamente a partir de la función de densidad de X $f_X(x)$, tal y como se explica a continuación.

Funciones derivables

De manera informal, decimos que una función es derivable cuando es continua y no tiene picos.

2.1. Función de densidad de $Y = g(X)$ cuando $g(x)$ es estrictamente creciente

Empezamos, pues, asumiendo una función continua, creciente y con una correspondencia de uno a uno entre la variable X y los valores que toma, $Y = g(X)$. Por definición, sabemos que la función de distribución de la variable Y se define como $F_Y(y) = P(Y \leq y)$. También sabemos que $Y = g(X)$; por lo tanto:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y).$$

Bajo las condiciones que acabamos de enumerar en el párrafo anterior para $Y = g(X)$, existe una función inversa, $g^{-1}(x)$, que está muy definida en todos los puntos y que nos permite obtener los valores de X a partir de Y. Si g es creciente, g^{-1} también lo será y podemos aplicarla a los dos lados de una desigualdad, de forma que se mantenga la desigualdad. Si aplicamos la función inversa a los dos lados de la expresión $g(X) \leq y$, obtenemos lo siguiente:

Función inversa

La función inversa $g^{-1}(x)$ deshace los cambios que había hecho la función $g(x)$.

$$g^{-1}(g(X)) \leq g^{-1}(y) \Rightarrow X \leq g^{-1}(y).$$

Si seguimos con el cálculo que habíamos empezado de $F_Y(y)$, podemos escribir lo siguiente:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)).$$

Ahora, en el último término de esta igualdad aparece la probabilidad de que X sea menor que un cierto valor, es decir, aparece la definición de la función de distribución de X, puesto que $P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$. Por lo tanto, podemos decir que:

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)). \quad (3)$$

Una vez encontrada la función de distribución, haremos la derivada para encontrar la función de densidad. Antes de dar este paso, hay que apuntar que el hecho de que $g(x)$ sea estrictamente creciente y derivable nos permite escribir:

Derivada de funciones inversas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas, es decir, $g \circ f = f \circ g = I$, entonces $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

$$(g^{-1}(y))' = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{1}{g'(x)} \quad \text{con} \quad x = g^{-1}(y),$$

Es decir, la derivada de esta función inversa, $g^{-1}(x)$, es 1 dividido entre la derivada de la función $g(x)$. Ahora ya podemos obtener la densidad de Y derivando la distribución de Y dada por (3), utilizando la regla de la cadena:

Véase también

La función de densidad se estudia en el subapartado 3.1 del módulo «Variables aleatorias».

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' = f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{g'(g^{-1}(y))},$$

y llegamos al resultado siguiente.

Si la transformación $Y = g(X)$ es estrictamente creciente:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{con} \quad x = g^{-1}(y). \tag{4}$$

Ejemplo 2.2

Consideramos las variables aleatorias X e $Y = X^3$. En este caso, tenemos $g(x) = x^3$, que es estrictamente creciente y derivable. De $y = x^3$ encontramos $x = g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$. Utilizando el resultado que acabamos de encontrar, que relaciona las funciones de densidad $f_Y(y)$ y $f_X(x)$, llegamos al resultado siguiente:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{3x^2} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}} f_X(y^{\frac{1}{3}}).$$

Ejemplo 2.3

Suponed que tenemos una variable aleatoria gaussiana con valor medio m y varianza σ^2, $X \sim \mathrm{N}(m,\sigma)$. Definimos una nueva variable aleatoria según la transformación siguiente: $Y = aX + b$. Si hacemos $a > 0$, entonces esta función $g(X) = aX + b$ es estrictamente creciente.

Ahora calculamos la función de densidad de la nueva variable Y:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{1}{a} f_X(x) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Para llegar a este resultado, recordad que $dy/dx = a$ y que $x = \frac{y-b}{a}$. Ahora sustituimos la función de densidad $f_X(x)$ de esta última igualdad por la función de densidad de la distribución normal o de Gauss y llegamos a la ecuación siguiente:

Véase también

La distribución de Gauss se estudia en el subapartado 3.2.3 del módulo «Variables aleatorias».

$$f_Y(y) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} e^{-\frac{(y-(am+b))^2}{2(a\sigma)^2}}.$$

Observad que la función de densidad de la variable Y es también gaussiana; esto es porque hemos aplicado una transformación lineal y, por lo tanto, la forma de la variable Y se ha mantenido. Únicamente han cambiado el valor medio y la desviación: $Y \sim \mathrm{N}(am+b, a\sigma)$.

2.2. Función de densidad de $Y = g(X)$ cuando $g(x)$ es estrictamente decreciente

Si la función $g(x)$ es estrictamente decreciente y derivable, obtenemos una expresión parecida a la del subapartado anterior:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

Observad, sin embargo, la tercera igualdad de esta ecuación. Dado que la función que aplicamos ahora es decreciente, el suceso $Y \leq y$ es equivalente al suceso $X \geq g^{-1}(y)$. En la cuarta igualdad, aplicamos el hecho de que si un suceso tiene una probabilidad p, su complementario tiene una probabilidad $1 - p$.

Como hemos hecho en el subapartado 2.1, si derivamos esta expresión llegamos al siguiente resultado.

Si la transformación $Y = g(X)$ es estrictamente decreciente:

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{con} \quad x = g^{-1}(y). \tag{5}$$

Ejemplo 2.4

Consideramos las variables aleatorias X e $Y = -X^3$. En este caso tenemos $g(x) = -x^3$, que es estrictamente decreciente y derivable, y $x = g^{-1}(y) = -y^{\frac{1}{3}}$. La relación entre las funciones de densidad es:

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{3x^2} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}} f_X(-y^{\frac{1}{3}}).$$

2.3. Función de densidad de $Y = g(X)$ cuando $g(x)$ no es monótona

En los casos vistos anteriormente, $g(x)$ era una función monótona (siempre creciente o siempre decreciente). Si $g(x)$ tiene intervalos de crecimiento y decrecimiento, calcular la función de distribución de Y es más complicado. En este caso, se llega a un método para calcular la densidad de Y directamente a partir de la densidad de X.

Transformaciones con trozos constantes

Si $Y = g(X)$ y $g(x)$ es constante en algún intervalo en el que la densidad de X es no nula, la variable Y no es continua sino mixta. Estos casos se tienen que tratar con más cuidado.

Consideremos el caso, bastante general, en el que la función $y = g(x)$ es derivable a trozos y no hay ningún intervalo en el que sea constante. Resolvemos $y = g(x)$ con soluciones $x_1(y), \ldots, x_n(y)$.

Entonces, la función de densidad de Y se obtiene a partir de la expresión siguiente:

Si la transformación $Y = g(X)$ no es constante en ningún intervalo:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \cdots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}. \tag{6}$$

donde $x_i(y)$ son las diferentes soluciones de la ecuación $g(x) = y$.

($f_Y(y) = 0$ para los valores de y tales que la ecuación no tiene soluciones.)

Notamos que el anterior resultado incluye los casos estudiados en los apartados 2.1 y 2.2. En estos casos, $g(x) = y$ tiene como mucho una solución.

Ejemplo 2.5

Consideramos una variable normal $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ y una nueva variable Y definida por la transformación $Y = X^2$.

X toma valores en todo $\mathbb{R}$. Su densidad es $f_X(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. La transformación no es monótona ($y = x^2$ es decreciente para $x < 0$ y creciente para $x > 0$). Resolviendo la ecuación $x^2 = y$, encontramos que no hay ninguna solución para $y < 0$, mientras que para $y > 0$ hay dos soluciones: $x_1(y) = -\sqrt{y}$ y $x_2(y) = \sqrt{y}$. La derivada de la transformación es $g'(x) = 2x$.

Entonces: $f_Y(y) = 0$ para $y < 0$. Para $y > 0$:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|2x_1|} + \frac{f_X(x_2)}{|2x_2|} = \frac{e^{-x_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{|2x_1|} + \frac{e^{-x_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{|2x_2|}$$

$$= \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} + \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} = \sqrt{\frac{2}{\pi y}}e^{-y/2}.$$

Ejemplo 2.6

Aplicamos ahora la transformación $Y = X^2$ a una variable uniforme $X \sim \mathrm{U}(2,3)$. X solo toma valores en el intervalo $(2,3)$. Su densidad es $f_X(x) = \frac{1}{3-2} = 1$ para $2 < x < 3$. La transformación no es monótona ($y = x^2$ es decreciente para $x < 0$ y creciente para $x > 0$). Resolviendo la ecuación $x^2 = y$ para y positiva encontramos dos soluciones $\pm\sqrt{y}$, pero $f_X(x)$ vale 0 en la solución negativa, así que en la fórmula (6) solo consideramos $x = \sqrt{y}$. Además, dado que $2 < x < 3$, tenemos que tomar $4 < y < 9$.

Entonces, para $4 < y < 9$:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|2x|} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

mientras que $f_Y(y) = 0$ fuera de este intervalo.

2.4. Ejemplos aplicados a las comunicaciones: el rectificador de media onda y el convertidor de analógico a digital

En los siguientes ejemplos, las transformaciones son constantes en algunos intervalos, de forma que la variable resultante no es continua. En el primer ejemplo resulta una variable mixta, mientras que en el segundo ejemplo se obtiene un variable discreta.

Ejemplo 2.7

Un rectificador de media onda es un dispositivo electrónico que elimina la parte positiva o negativa de una señal. En la figura 2 podéis ver su funcionamiento.

Figura 2. Rectificador de media onda

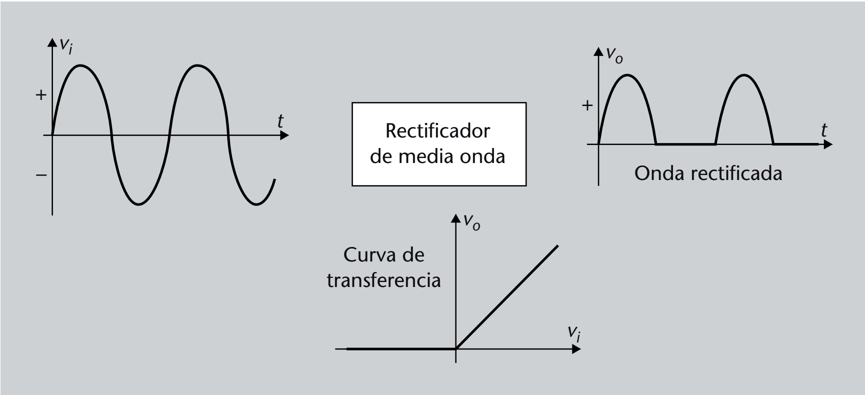


Figura 2

El rectificador de media onda de este ejemplo elimina la parte negativa de la señal de entrada.

La función $g(x)$ definida por este dispositivo es

$$y = g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ahora suponed que hacemos pasar por este rectificador una señal gaussiana de media cero y varianza σ^2. Calcularemos la función de densidad de la variable aleatoria generada a la salida del rectificador.

Observación

Observad que la variable y es mixta, ya que para valores negativos de x toma un solo valor (discreto), igual a cero, y para valores positivos, toma el valor de x.

Dado que la transformación tiene un trozo constante (el semieje $x < 0$), podemos prever que la variable resultante sea mixta. Por lo tanto, calcularemos la función de distribución de Y y la derivaremos utilizando la delta de Dirac, tal y como se vio en el apartado 3.6 del módulo «Variables aleatorias».

Para $y < 0$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = 0$, puesto que $g(x)$ nunca es negativa.

En $y = 0$, $F_Y(0) = P(Y \leq 0) = P(g(X) \leq 0) = P(g(X) = 0) = P(X \leq 0) = F_X(0) = \frac{1}{2}$ (hemos definido la señal de entrada al rectificador como una variable de Gauss con valor medio cero; por lo tanto, $P(X < 0) = \frac{1}{2}$).

Para $y > 0$, $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq y) = F_X(y)$.

Así, podemos expresar el resultado:

$$F_Y(y) = u(y)F_X(y).$$

Si derivamos, se obtiene:

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = u'(y)F_X(y) + u(y)F'_X(y) = \delta(y)F_X(0) + u(y)f_X(y).$$

Así pues, la función de densidad de la señal de salida del rectificador es la siguiente:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}u(y) + \frac{1}{2}\delta(y).$$

Observad que esta función de densidad tiene dos partes: una parte continua, que se da para valores de y mayores que cero -por eso el primer término está multiplicado por la función escalón $u(y)$-, y una parte discreta para $y = 0$, que representamos utilizando la función delta ($\delta(y)$).

Ejemplo 2.8

Supongamos que ahora la transformación $g(x)$ que aplicamos a una señal de entrada es $g(x) = y_0$ en vez de $g(x) = x$ para $x_1 \leq x \leq x_2$. Como hemos visto en el ejemplo anterior, la función de densidad $f_Y(y)$ incluirá un componente discreto (acompañado de la función delta, $\delta(y)$) de valor igual a $P(Y = y_0) = P(x_1 \leq x \leq x_2)$ en el punto $y = y_0$. Podemos definir diferentes valores de $g(x)$ para distintos intervalos. Así es como funciona un convertidor de analógico a digital. Dada una señal de entrada analógica (continua), este circuito lo que hace es discretizarla según una serie de intervalos definidos y con una resolución concreta. En la figura 3 podéis ver cómo es la curva de transferencia o transformación $g(x)$ de este dispositivo.

Figura 3. Curva de transferencia de un cuantificador

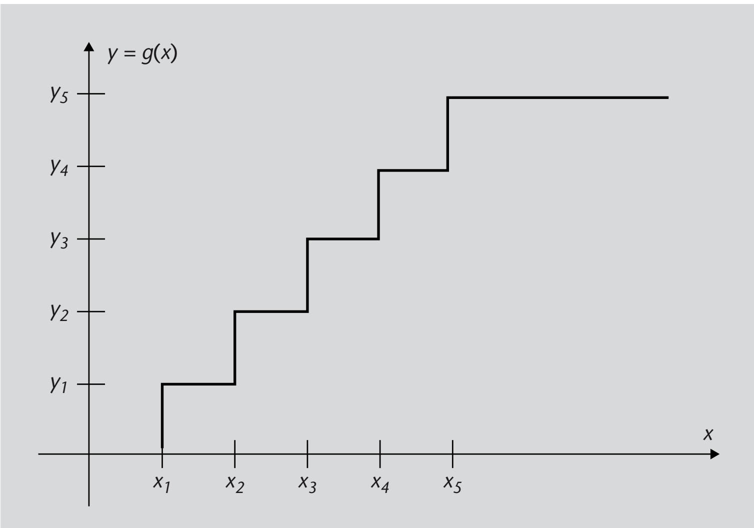


Figura 3

Un cuantificador transforma una señal analógica y continua en una señal discreta o digital.

En términos de variables aleatorias, este convertidor toma una variable aleatoria continua, X, y la transforma en una variable aleatoria discreta. Si definimos la función $g(x)$ de la manera siguiente:

$$y = g(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x < x_1 \\ & \dots \\ y_i & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1} \\ & \dots \\ y_N & \text{si } x \geq x_N. \end{cases}$$

Entonces Y resulta una variable aleatoria discreta y podemos trabajar directamente con las probabilidades, tal y como hemos visto en el apartado 1 de este módulo. La función de probabilidad para este ejemplo queda, pues, definida como sigue:

$$P(Y = y_i) = \begin{cases} P(X < x_1) & \text{si } i = 0 \\ P(x_i \leq X < x_{i+1}) & \text{si } i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ P(X \geq x_N) & \text{si } i = N. \end{cases}$$

3. Teorema de la esperanza

En los apartados anteriores de este módulo, hemos visto cómo se pueden aplicar funciones sobre una variable aleatoria, ya sea discreta o continua, para obtener una nueva variable aleatoria. En el caso de las variables discretas, hemos visto que podemos definir directamente las probabilidades (función de probabilidad) de la nueva variable aleatoria. En el caso de las variables aleatorias continuas, hemos visto cómo podemos obtener las funciones de distribución y de densidad. También hemos obtenido una fórmula que nos simplifica los cálculos y que podemos aplicar cuando la función de transformación, $g(x)$, es estrictamente creciente, decreciente, o podemos hacer esta separación por tramos.

Muchas veces, solo nos interesa encontrar el valor medio o esperanza de la variable transformada $Y = g(X)$, y no necesitamos encontrar previamente la función de densidad $f_Y(y)$. El teorema de la esperanza nos permite encontrar la esperanza, $\mathrm{E}(Y)$, de la variable aleatoria Y definida por $Y = g(X)$, aunque $f_Y(y)$ no sea conocida.

Teorema de la esperanza para variables aleatorias continuas

Si X es una variable aleatoria continua y definimos una nueva variable aleatoria, $Y = g(X)$, entonces:

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx. \tag{7}$$

Aunque hemos enunciado este teorema para variables aleatorias continuas, también es válido para variables aleatorias discretas y solo hay que tener en cuenta que en lugar de integrales, tendremos sumatorios.

Teorema de la esperanza para variables aleatorias discretas. Si X es una variable aleatoria discreta que toma valores en el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y definimos una nueva variable aleatoria discreta $Y = g(X)$, entonces:

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} g(a_i) P(X = a_i). \tag{8}$$

Ejemplo 3.1

Con el mismo enunciado que en el ejemplo 2.1, encontraremos la esperanza de la variable Y de dos maneras diferentes:

1) A partir de la definición de $\mathrm{E}(Y)$ y a partir de $f_Y(y)$. Habíamos encontrado

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{y^2} & \text{si } 0{,}8 < y < 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Tenemos:

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_{0{,}8}^{1} y\, \frac{4}{y^2}\, dy = [4 \ln y]_{0{,}8}^{1} = -4\ln(0{,}8).$$

2) Utilizando el teorema de la esperanza, en el que solo hay que recordar la función de densidad de la variable original, X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 8 < x < 10 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = \int_{8}^{10} \frac{8}{x} \cdot \frac{1}{2}\, dx = 4(\ln 10 - \ln 8) = -4\ln(0,8).$$

Observación

El teorema de la esperanza nos permite calcular directamente la esperanza de $Y = g(X)$ a partir de la función de densidad (o de probabilidad) de la variable aleatoria X.

Linealidad de la esperanza

Sea X una variable aleatoria continua o discreta. Se satisface:

$$\mathrm{E}(ag(X) + bh(X)) = a\,\mathrm{E}(g(X)) + b\,\mathrm{E}(h(X)), \tag{9}$$

donde a, $b \in \mathbb{R}$ y g, h son funciones de X.

Con esta propiedad, ahora podemos demostrar una propiedad que ya habíamos usado:

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) = \mathrm{E}(X^2 - 2X\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2) = \mathrm{E}(X^2) - 2\,\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.

Observación

La esperanza es un operador lineal. Además, hay que notar que en el caso de una constante c, se satisface $\mathrm{E}(c) = c$. Hay que notar, sin embargo, que la varianza no presenta esta propiedad.

Ejemplo 3.2

Variable aleatoria constante. Esperanza y varianza de una variable transformada linealmente

Dada la variable aleatoria X, definimos la nueva variable $Y = aX + b$ donde a y b son constantes.

Notamos que en el caso $a = 0$, resulta que la variable Y es constante $Y = b$. Este es un caso especial: una variable que siempre toma el mismo valor. Se trata de una variable discreta que toma un único valor ($\Omega_Y = \{b\}$) con probabilidad 1 ($P(Y = b) = 1$). De aquí se deduce inmediatamente que su esperanza es b ($\mathrm{E}(Y) = b \cdot 1 = b$) y su varianza es cero ($\mathrm{Var}(Y) = (b - b)^2 \cdot 1 = 0$):

$$\mathrm{E}(b) = b, \qquad \mathrm{Var}(b) = 0. \tag{10}$$

Volviendo a la transformación $Y = aX + b$.

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(b) = a\,\mathrm{E}(X) + b.$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}[(Y - \mathrm{E}(Y))^2] = \mathrm{E}[((aX + b) - (a\,\mathrm{E}(X) + b))^2] =$$

$$= \mathrm{E}[a^2(X - \mathrm{E}(X))^2] = a^2\,\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^2] = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

Es decir:

$$\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b, \qquad \mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X). \tag{11}$$

Ejemplo 3.3

El tiempo en años, X, que tarda en estropearse un componente electrónico, sigue una distribución exponencial, Exp(1). El coste, Y, de reparación del componente durante el primer año, es función de $2X$, mientras que después es de $3X + 2$. Encontramos el valor medio del coste.

Podemos expresar el coste Y como:

$$Y = g(X) = \begin{cases} 2X & \text{si } 0 < X < 1 \\ 3X + 2 & \text{si } X \geq 1 \end{cases}$$

A continuación, calculamos la esperanza de la variable Y. Aplicando el teorema de la esperanza -X tiene densidad $f_X(x) = e^{-x}$ por $x > 0$:

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_0^{\infty} g(x) e^{-x} dx = \int_0^1 2xe^{-x} dx + \int_1^{\infty} (3x + 2) e^{-x} dx$$

$$= 2[-(x + 1)e^{-x}]_0^1 + [-(3x + 5)e^{-x}]_1^{\infty} = 2(-2e^{-1} + 1) + 8e^{-1} = 2 + 4e^{-1}.$$

Resumen

En este módulo, hemos visto que podemos tomar una variable aleatoria (ya sea discreta o continua) y aplicarle una función $g(X)$ tal que obtengamos una nueva variable aleatoria $Y = g(X)$.

Para el caso de las variables aleatorias discretas (apartado 1 de este módulo), hemos visto que podemos calcular la distribución de probabilidades, es decir, definir todas las probabilidades $P(Y = b_j))$ a partir de las probabilidades de X:

$$P(Y=b_j) = \sum_{\substack{a_i \\ (g(a_i)=b_j)}} P(X=a_i).$$

Para el caso de las variables aleatorias continuas (apartado 2 de este módulo), hemos visto que a partir de la función de distribución y de densidad de X, $F_X(x)$ y $f(x)$, respectivamente, podemos calcular la función de distribución y de densidad de la nueva variable aleatoria Y:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y).$$

Hemos visto también tres casos especiales que nos permiten calcular rápidamente la función de densidad de la nueva variable Y a partir de la función de densidad de la variable X. Estos casos son los siguientes:

- Cuando la función $g(x)$ es estrictamente creciente, entonces:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{con} \quad x = g^{-1}(y).$$

- Cuando la función $g(x)$ es estrictamente decreciente, entonces:

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{con} \quad x = g^{-1}(y).$$

- Cuando la función $g(x)$ no tiene trozos constantes, entonces:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \cdots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}.$$

Finalmente hemos visto el teorema de la esperanza, que permite calcular la esperanza de la nueva variable sin haber calculado su densidad.

Actividades

1. Disponemos de un generador de números aleatorios, X, dentro del intervalo $(0,1)$. Queremos estudiar qué sucede con nuestro generador si aplicamos sobre X una función exponencial de tipo $Y = e^X$. Se pide lo siguiente:

a) Encontrad la función de distribución de la variable aleatoria Y.

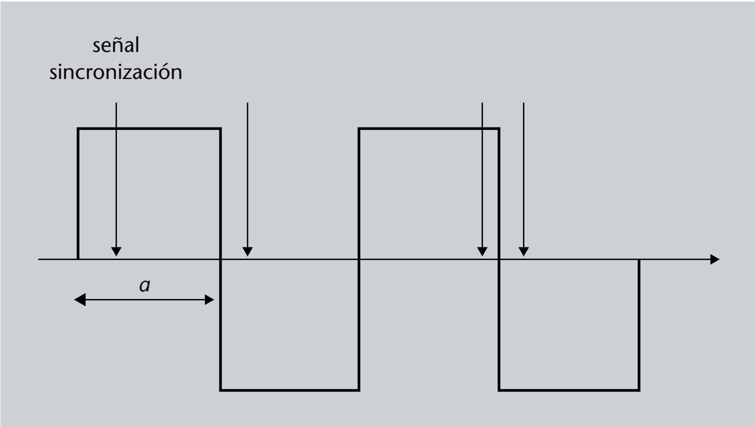
b) Encontrad la función de densidad de la variable aleatoria Y a partir del resultado del apartado anterior.

c) Volved a calcular la densidad de Y, a partir de la densidad de X.

d) Encontrad $\mathrm{E}(Y)$ a partir de la función de densidad de X.
Pista: utilizad el teorema de la esperanza.

2. Disponemos de un generador de onda cuadrada en el que la anchura de cada pulso depende de la frecuencia de trabajo. Denominamos esta anchura a. Dentro de cada pulso, necesitamos recibir una señal de sincronización. Llamamos X a esta señal, que se comporta como una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0,a)$, en el que $a > 0$. En la figura 4, podéis ver un ejemplo de esto.

Figura 4. Sincronización de una onda cuadrada



Se pide:

a) Encontrad el valor esperado de la variable aleatoria X, es decir, $\mathrm{E}(X)$.

b) Encontrad el momento de orden 2 de la variable aleatoria X, es decir, $\mathrm{E}(X^2)$.

c) Encontrad la expresión genérica del momento de orden n de la variable aleatoria X, es decir, $\mathrm{E}(X^n)$, $n = 1,2,\ldots$.

3. La atenuación en las señales transmitidas que introduce un canal de comunicaciones se puede modelizar con una variable aleatoria X que sigue una distribución $\mathrm{N}(m,\sigma)$. Para compensar las pérdidas introducidas, hacemos pasar la señal de salida por un filtro con forma $Y = e^X$. Se pide lo siguiente:

a) Representad la función $y = g(x) = e^x$ y comprobad que es una función derivable y estrictamente creciente.

b) Encontrad la función de densidad de Y, expresada en función de los parámetros m y σ.

c) Cuando $X = \ln Y$ es una normal, la distribución de Y se denomina *log-normal*. Buscad por internet algún ámbito de aplicación de esta distribución log-normal (por ejemplo, el ámbito de la fiabilidad) y comentadlo brevemente.

4. La amplitud de una onda electromagnética se representa por una variable aleatoria X uniforme en el intervalo $[0,2]$. Para calcular la potencia que transporta la onda, necesitamos calcular el cuadrado del módulo del campo. Por lo tanto, definimos $Y = X^2$. Se pide lo siguiente:

a) Encontrad la función de distribución de la variable aleatoria Y.

b) Encontrad la función de densidad de la variable aleatoria Y.

c) Encontrad $\mathrm{E}(Y)$ a partir de la función de densidad de X.

5. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución $F_X(x)$. Se define $Y = g(X) = F_X(X)$. Demostrad que Y es una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$, es decir, que su función de densidad coincide con la de una uniforme en $(0, 1)$.

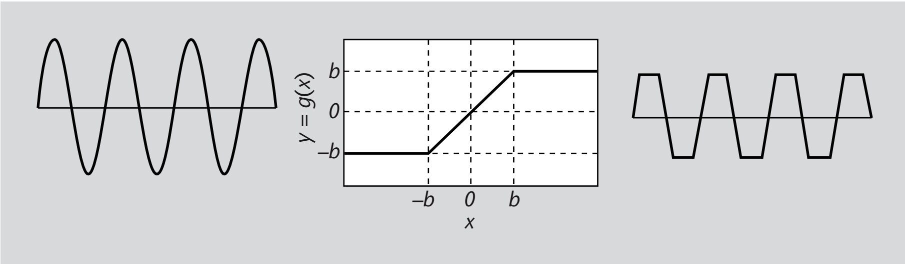
Pista: utilizad el hecho de que $F_X(x)$ es una función creciente y derivable.

6. Hacemos pasar una señal acústica X por un amplificador que tiene la función característica siguiente: $y = g(x) = ax + b$, donde a es un valor positivo. La intensidad de la señal acústica de entrada es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ. Encontrad la función de distribución y la función de densidad de la variable aleatoria Y que da la intensidad de salida.

7. Un saturador es un circuito que recorta la amplitud de las señales a partir de un cierto umbral. En la figura 5, podéis ver un ejemplo de esto.

Encontrad la función de distribución y de densidad de Y en función del parámetro b y de $F_X(x)$, $f_X(x)$.

Figura 5. Circuito saturador



Solucionario

1.

a) Puesto que $X \sim \mathrm{U}(0,1)$, X tiene función de densidad de $f_X(x) = 1$, y función de distribución $F_X(x) = x$, para $0 < x < 1$.

Notad que $0 < x < 1 \Leftrightarrow 1 < y < e$. Por lo tanto, la función de distribución de Y será: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(e^X \leq y\right) = P(X \leq \ln y) = F_X(\ln y) = \ln y$, $1 < y < e$.

Es decir: $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; y < 1, \\ \ln y & \text{si } \; 1 \geq y < e, \\ 1 & \text{si } \; y \geq e. \end{cases}$

b) La función de densidad de Y será: $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{y}$, $1 < y < e$.

Es decir: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si } \; 1 < y < e, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$

c) $y = g(x) = e^x$, $g'(x) = e^x$. Si x varía entre 0 y 1, y varía entre 1 y e.

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

d) Por el teorema de la esperanza: $\mathrm{E}(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x)dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$

2.

a) $X \sim \mathrm{U}(0,a)$ tiene densidad $f_X(x) = \frac{1}{a}$ para $0 < x < a$.

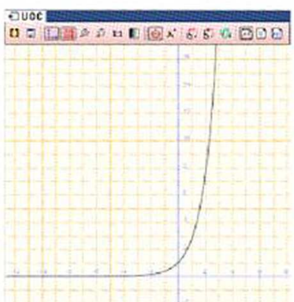
$\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^a \frac{x}{a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a = \frac{a}{2}.$

b) $\mathrm{E}(X^2) = \displaystyle\int_0^a \frac{x^2}{a}\,dx = \left[\frac{x^3}{3a}\right]_0^a = \frac{a^2}{3}.$

c) $\mathrm{E}(X^n) = \displaystyle\int_0^a \frac{x^n}{a}\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)a}\right]_0^a = \frac{a^n}{n+1}.$

3.

a) La gráfica de la función es:



b) La función de densidad de X es: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right]$, $-\infty < x < \infty$.

$y = g(x) = e^x$ es estrictamente creciente y derivable. Los valores que toma y son todos los de 0 a ∞. También tenemos $g'(x) = e^x = y$.

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{1}{y} f_X(\ln y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y - m)^2\right], \quad 0 < y < \infty.$$

c) Uno de los ámbitos en los que se aplica la distribución log-normal es el de la fiabilidad. Esta distribución se suele utilizar para modelizar tiempos de fallo o de reparación de dispositivos electrónicos que forman parte de sistemas o redes de telecomunicaciones. En estos casos, se suele hacer uso de la log-normal (u otras distribuciones, como la de Weibull) para modelizar los tiempos mencionados, puesto que si utilizáramos una distribución normal, se podrían obtener valores negativos para los tiempos de fallo o reparación, lo que carecería de sentido.

4.

a) Puesto que $X \sim \mathrm{U}(0,2)$, la función de densidad de X es $f_X(x) = \frac{1}{2}$ para $0 \leq x \leq 2$.

Observad que $0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4$.

Por lo tanto, la función de distribución de Y será:

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = P(0 \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{y}} dx = \frac{\sqrt{y}}{2}$, para $0 \leq y \leq 4$.

Es decir: $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ \frac{\sqrt{y}}{2} & \text{si } 0 \leq y < 4, \\ 1 & \text{si } y \geq 4. \end{cases}$

b) La función de densidad de Y será: $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\frac{\sqrt{y}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{y}}$ para $0 < y < 4$.

Es decir: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y < 4, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$

De manera alternativa, se puede calcular $f_Y(y) = \dfrac{f_X(x)}{g'(x)} = \dfrac{1/2}{2x} = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

c) Según el teorema de la esperanza: $\mathrm{E}(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{4}{3}$.

Podemos verificar que coincide con el valor esperado:

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int_0^4 \frac{y}{4\sqrt{y}}dy = \frac{1}{4}\int_0^4 \sqrt{y}dy = \frac{4}{3}.$$

5. Por las propiedades de las funciones de distribución, $F_X(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$ con valores dentro de $[0,1]$. Además, haciendo uso del resultado sobre funciones de densidad de $Y = g(X)$, tenemos que:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{\frac{dF_X(x)}{dx}} = \frac{f_X(x)}{f_X(x)} = 1, \quad 0 < x < 1.$$

Es decir: $f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$

Por lo tanto, $Y \sim \mathrm{U}(0,1)$.

El resultado es claro cuando F_X es estrictamente creciente. Si en algún intervalo es constante, en este intervalo $f_X(x) = F'_X(x) = 0$ y no hay contribución a la densidad de Y.

6. Sabemos que $y = g(x) = ax + b$. Por lo tanto, aislando la x de esta expresión, llegamos a:

$$x = g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}.$$

De esta relación, podemos sacar:

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Sí $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } \ x \geq 0, \\ 0 & \text{si } \ x < 0. \end{cases}$

Entonces, si $y < b$, el argumento de F_X es negativo y su valor es 0. Si $y > b$, el argumento de F_X es positivo y llegamos a:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \frac{y-b}{a}} & \text{si } \ y \geq b, \\ 0 & \text{si } \ y < b. \end{cases}$$

Para calcular la función de densidad, podemos derivar la anterior función o utilizar la densidad de X: $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$ y la regla de transformación:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{a},$$

puesto que $g'(x) = a > 0$. Por lo tanto:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a} e^{-\lambda \frac{y-b}{a}} & \text{si } \ y > b, \\ 0 & \text{si } \ y < b. \end{cases}$$

7. Según la figura 5, la variable Y toma los valores siguientes:

$$Y = g(X) = \begin{cases} -b & \text{si } \ X < -b, \\ X & \text{si } \ -b \leq X < b, \\ b & \text{si } \ X \geq b. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta esto, y en función de $F_X(x)$, es decir, para una función de distribución de X genérica, $F_Y(y)$ es:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ y < -b, \\ F_X(y) & \text{si } \ -b \leq y < b, \\ 1 & \text{si } \ y \geq b. \end{cases}$$

Para calcular la función de distribución, debemos tener en cuenta que la función de distribución de Y tiene discontinuidades de salto en los puntos $y = -b$ y $y = b$. Estos puntos tienen carácter discreto con probabilidades $P(Y = -b) = P(X < -b) = F_X(-b)$ y $P(Y = b) = P(X > b) = 1 - F_X(b)$. Estos puntos dan contribuciones tipo función delta a la densidad. Por el resto del intervalo $(-b, b)$, podemos derivar $F_X(y)$ y obtenemos $f_X(y)$.

Utilizando funciones escalón, podemos expresar:

$$F_Y(y) = (u(y+b) - u(y-b))F_X(y) + u(y-b)$$

Por lo tanto, y tal como habíamos visto en el ejemplo 2.7 de este módulo, podemos derivar la anterior función y expresar la función de densidad como sigue:

$$f_Y(y) = F_X(-b)\,\delta(y+b) + (1 - F_X(b))\,\delta(y-b) + f_X(y) \cdot 1_{(-b,b)}(y),$$

donde $1_{(-b,b)}(y) = u(y+b) - u(y-b)$ vale 1 si $-b < y < b$ y 0 en caso contrario.