Procesos estocásticos gaussianos y procesos estocásticos de Poisson

PID_00253298

Josep Maria Aroca

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 1 hora

Universitat Oberta de Catalunya

Índice

Introducción

En este módulo estudiaremos dos clases importantes de procesos: los procesos estocásticos gaussianos y los procesos estocásticos de Poisson. Estos dos tipos de procesos son una extensión de las variables aleatorias del mismo nombre que ya habíamos visto en el módulo "Variables aleatorias".

Hemos elegido estos dos tipos de procesos por su relevancia en el mundo de las telecomunicaciones. Cuando estudiamos las variables aleatorias de Gauss y Poisson ya vimos que nos permitían modelizar diferentes fenómenos y sucesos que se dan muy frecuentemente en multitud de señales y sistemas. Recordemos algunas de las aplicaciones que estudiamos.

Con la variable aleatoria gaussiana podíamos modelizar lo siguiente:

- Fluctuación de señales y del comportamiento de los aparatos electrónicos.
- Señales de ruido.
- Control de calidad estadística.
- Fluctuación de un conjunto de medidas aleatorias, etc.

Con la variable aleatoria de Poisson podíamos modelizar, entre otras:

- Número de llamadas que llegan a una centralita telefónica o de peticiones que llegan a un servidor.
- Número de colisiones de paquetes en una red, etc.

Lo que haremos en este módulo es pasar de las variables aleatorias de Gauss y Poisson a los procesos estocásticos. Esta extensión nos permitirá modelizar de una manera más detallada situaciones más complejas. Ahora ya no tendremos un valor para cada realización, como sucede en el caso de las variables aleatorias, sino que obtendremos una función determinada, como sucede en el caso de los procesos estocásticos. Recordad* que para evaluar un proceso estocástico lo que hacíamos era tomar n muestras en instantes de tiempo diferentes y considerar el proceso como si fuese un vector aleatorio. Por tanto, podéis entender el paso de las variables aleatorias a los procesos estocásticos como el paso de valores unidimensionales a vectores de orden n.

Véase también

Podéis consultar los subapartados 2.1.4 y 3.2.3 del módulo "Variables aleatorias" para recordar las variables aleatorias de Poisson y de Gauss.

* Tal como vimos en el apartado 1 del módulo "Caracterización estadística y parámetros de los procesos estocásticos".

Hemos dividido este módulo en dos apartados. En el apartado 1 estudiaremos con detalle los procesos estocásticos gaussianos. En particular, veremos cómo se define este tipo de procesos y veremos sus características más importantes. Aplicaremos todo lo que veremos al estudio del ruido blanco. El apartado 2 lo dedicaremos a los procesos estocásticos de Poisson. Siguiendo la misma estructura que en el apartado 1, lo definiremos y veremos sus características. Una vez hecho esto, aplicaremos todos estos conocimientos a un caso particular: el estudio de las señales de telegrafía.

Objetivos

Los objetivos que debe alcanzar el estudiante una vez trabajados los materiales didácticos de este módulo son:

1. Conocer los procesos gaussianos, saber cómo se caracterizan.

2. Estudiar las propiedades de los procesos gaussianos.

3. Aplicar los procesos gaussianos al estudio del ruido blanco presente en muchos sistemas de telecomunicación.

4. Conocer el proceso de Poisson y sus derivados.

5. Estudiar los parámetros del proceso de Poisson y calcularlos.

6. Aplicar los procesos de Poisson para estudiar un caso concreto: los sistemas de telegrafía.

1. Procesos estocásticos gaussianos

Los procesos estocásticos gaussianos o normales extienden el concepto de variable aleatoria normal. Se pueden pensar como si en cada instante t se generase una variable gaussiana $X(t)$, es decir, es como tener una variable gaussiana dependiente de un índice continuo t.

Véase también

Recordad la variable aleatoria de Gauss o normal vista en el subapartado 3.2.3 del módulo "Variables aleatorias".

1.1. Variable gaussiana n-dimensional

Para poder definir el **proceso estocástico gaussiano**, necesitamos definir previamente el **vector aleatorio gaussiano**.

Recordemos primero la variable aleatoria gaussiana unidimensional. Decimos que X es gaussiana o normal si su densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1}$$

donde m es el valor medio de X y σ (sigma) la desviación típica o estándar.

El comportamiento gaussiano se generaliza a dimensión superior n tomando una función de densidad que sea la exponencial de un polinomio de segundo grado en sus variables. Este polinomio se expresa en función de los parámetros de primer y segundo orden de las n variables.

Observación

Tened en cuenta que en esta definición el vector **x** que aparece en el exponencial es n-dimensional. **m** también es un vector y corresponde a las medias de cada x_i. K es la matriz de covarianzas, es simétrica y tiene dimensiones $n \times n$.

Definición 1.1. Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son **conjuntamente gaussianas** si su densidad conjunta es

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)}, \tag{2}$$

donde x es un vector de dimensión n: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Los valores de x pueden variar entre $-\infty < x_i < \infty$. El vector de valores medios, m, también tiene dimensión n y representa las medias de cada x_i, es decir, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ es el vector de esperanzas y $m_i = \mathrm{E}(X_i)$. K es la matriz de covarianzas: $K_{i,j} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j),\ i, j = 1, 2, \ldots, n$ y representamos el determinante de esta matriz con $|K|$. K^{-1} es la inversa de la matriz de covarianzas. Observad que la matriz K es simétrica, es decir, $K_{i,j} = K_{j,i}$, ya que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}(X_j, X_i)$.

Covarianza, coeficiente de correlación y varianza

Recordad la definición de covarianza para los vectores bidimensionales que vimos en el subapartado 2.4 del módulo "Vectores aleatorios": $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. También definíamos el coeficiente de correlación ρ (ro) como: $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$. La varianza de una variable aleatoria es $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \sigma^2$ (subapartado 3.3 del módulo "Variables aleatorias"), que, si os fijáis, también corresponde a $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$.

Como vimos en el caso de la variable aleatoria gaussiana, todo lo que necesitamos para definir la función de densidad de este tipo de proceso estocástico es el vector de medias y el equivalente a la desviación estándar, que en este caso es la matriz de covarianzas.

Veamos un ejemplo de ello y hagamos algunos cálculos.

Ejemplo 1.1

Como ejemplo, obtendremos la densidad de un vector de dimensión 2 gaussiano. Representamos $X_1 = X, X_2 = Y$. Es decir, tenemos un vector bidimensional formado por dos variables aleatorias gaussianas, X e Y, con medias m_x y m_y y desviaciones σ_x y σ_y, respectivamente. El vector de esperanzas es $m = (m_X, m_Y)$. Expresando la covarianza en términos del coeficiente de correlación ρ y de las desviaciones de X y de Y, σ_X y σ_Y, tenemos que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$. Los términos diagonales de K son las varianzas $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2, \mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$. Así

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

A continuación calculamos el determinante de la matriz de covarianzas:

$$|K| = \sigma_X^2\sigma_Y^2(1-\rho^2).$$

Con estos datos ya podemos calcular la matriz de covarianzas inversa, K^{-1}:

$$K^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{pmatrix}.$$

En la función de densidad que hemos visto mediante la ecuación (2) debemos poner $n = 2$ y $|K|^{1/2} = \sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}$.

El exponente del término exponencial se calcula como sigue:

$$(x-m)^T K^{-1}(x-m) = (x-m_X, y-m_Y)\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-m_X \\ y-m_Y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right).$$

Observación

En esta expresión se considera $(x-m)$ como una matriz columna, de manera que $(x-m)^T K^{-1}(x-m)$ es producto de matrices con dimensiones $(1\times n)\cdot(n\times n)\cdot(n\times 1) = (1\times 1)$.

Y sustituyendo todos los términos que hemos calculado en la expresión de la función de densidad para una variable gaussiana multidimensional, llegamos a la fórmula siguiente:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)}. \tag{3}$$

Veamos ahora un segundo ejemplo en el que se pueden aplicar todos estos conceptos.

Ejemplo 1.2

(X, Y, Z) es un vector tridimensional gaussiano donde $\mathrm{E}(X) = 0, \mathrm{E}(Y) = 1, \mathrm{E}(Z) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1, \mathrm{Var}(Y) = 1, \mathrm{Var}(Z) = \frac{1}{2}$. Nos dicen que X e Y son independientes, Y y Z son independientes, y $\mathrm{Cov}(X, Z) = \frac{1}{2}$. Se trata de escribir la densidad conjunta.

Tenemos que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, Z) = 0$, ya que dos variables independientes también son incorrelacionadas. Así, tenemos todos los parámetros de primer y segundo orden y los podemos sustituir en la expresión general (ecuación (2)). Tendremos que $n = 3$ y

$$K = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Cov}(X,Z) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) & \mathrm{Cov}(Y,Z) \\ \mathrm{Cov}(X,Z) & \mathrm{Cov}(Y,Z) & \mathrm{Var}(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz vale $|K| = \frac{1}{4}$ y su inversa es:

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

El exponente de la función de densidad genérica que hemos visto en la ecuación (2) será:

$$-\frac{1}{2}(x, y-1, z)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2z^2 + 2xz + y - \frac{1}{2}.$$

Finalmente, la función de densidad queda:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} e^{-x^2-\frac{1}{2}y^2-2z^2+2xz+y-\frac{1}{2}}.$$

Correlación y variables independientes

Recordad que la definición de correlación es la esperanza del producto menos el producto de esperanzas. También hemos visto que si dos variables son independientes, la esperanza del producto es el producto de esperanzas. Por tanto, las variables independientes son incorrelacionadas.

Señalemos ahora las propiedades siguientes del vector gaussiano n-dimensional:

1) En un vector aleatorio gaussiano, la distribución marginal de cualquier subconjunto de las variables también es gaussiano.

2) La distribución de probabilidad de un vector aleatorio gaussiano queda determinada a partir de los parámetros de primer y segundo orden de las variables que lo forman.

Efectivamente, la densidad que hemos visto en la ecuación (2) queda fijada si conocemos las esperanzas, varianzas y covarianzas de las variables X_i.

Ejemplo 1.3

Ya sabemos que si dos variables, X e Y, son independientes, entonces son incorrelacionadas. Como acabamos de ver en el ejemplo anterior, eso significa que $\text{Cov}(X, Y) = 0$. En general, dos variables pueden ser incorrelacionadas sin ser independientes. Analicemos este aspecto para el caso de las variables gaussianas. ¿Qué pasa si dos variables X e Y conjuntamente gaussianas son incorrelacionadas ($\text{Cov}(X, Y) = 0$)?

Si son incorrelacionadas, el coeficiente de correlación vale $\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$. Introduciendo este valor en la función de densidad gaussiana definida en la ecuación (3) encontramos:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)}.$$

Ahora, este resultado coincide con el producto de las densidades marginales de X y de Y:

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}.$$

Hemos demostrado, pues, que si dos variables gaussianas son incorrelacionadas, entonces son independientes. Esta es una propiedad característica de las variables aleatorias normales.

Recordatorio

Cuando dos o más variables gaussianas son incorrelacionadas, son también independientes.

3) Las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, conjuntamente gaussianas, son independientes si y solo si son incorrelacionadas ($\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ para todo $i \neq j$).

Recordemos que independencia siempre implica incorrelación. En el caso gaussiano, también es cierto lo recíproco. Para demostrarlo solo hay que tener en cuenta que, si son incorrelacionadas, la matriz K es diagonal y eso nos factoriza la densidad conjunta en producto de las densidades marginales de todas las X_i. Recordad que este cálculo se ha hecho en detalle para el caso $n = 2$ en el ejemplo 1.3.

4) El caracter gaussiano se mantiene bajo transformaciones lineales.

Es decir, si tenemos un vector gaussiano y obtenemos nuevas variables haciendo combinaciones lineales de las variables que forman este vector, el resultado son variables que también son gaussianas. El motivo es que al hacer el cambio en la función de densidad se obtiene también la exponencial de un polinomio de segundo grado en las nuevas variables. De hecho, podemos hacer el cambio no homogéneo, es decir, sumando una constante.

Veamos un ejemplo para clarificar esta propiedad de los vectores gaussianos para el caso de dimensión 3.

Ejemplo 1.4

A partir del vector (X, Y, Z) del ejemplo 1.2 definimos un nuevo vector aleatorio (U, V, W) de la manera siguiente:

$$\begin{cases} U = X + Z \\ V = Y - 1 \\ W = 2X - 3Z \end{cases}$$

Del sistema anterior podemos aislar X, Y, Z en función de U, V, W:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{5}(3U + W) \\ Y = V + 1 \\ Z = \frac{1}{5}(2U - W) \end{cases}$$

La función de densidad de (U, V, W) dependerá de estas variables por medio de la exponencial de la función que se obtiene sustituyendo $x = (3u+w)/5, y = v+1, z = (2u-w)/5$ en el polinomio que teníamos en la exponente de la función de densidad de (X, Y, Z):

$$-x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2z^2 + 2xz + y - \frac{1}{2}.$$

El resultado es un nuevo polinomio:

$$-\frac{1}{5}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{5}w^2.$$

Así, el vector (U, V, W) también es gaussiano.

Una manera de escribir la función de densidad conjunta de las nuevas variables U, V, W sin hacer el cambio a partir de la función de densidad del vector (X, Y, Z) consiste en calcular los parámetros de las nuevas variables y utilizar la fórmula general (ecuación (2)):

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(X + Z) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Z) = 0, \\ &\mathrm{E}(V) = \mathrm{E}(Y - 1) = \mathrm{E}(Y) - 1 = 0, \\ &\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(2X - 3Z) = 2\,\mathrm{E}(X) - 3\,\mathrm{E}(Z) = 0. \end{aligned}$$

Para calcular los parámetros de segundo orden advirtamos que $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0$. De la misma manera se obtiene $\mathrm{E}(YZ) = 0$ y $\mathrm{E}(XZ) = \frac{1}{2}$. También tenemos que $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}(X)^2 = 1$, $\mathrm{E}(Y^2) = 2$ y $\mathrm{E}(Z^2) = \frac{1}{2}$. Ahora obtenemos

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}(U) = \mathrm{E}(U^2) - \mathrm{E}(U)^2 = \mathrm{E}[(X + Z)^2] = \mathrm{E}(X^2) + 2\,\mathrm{E}(XZ) + \mathrm{E}(Z^2) = \tfrac{5}{2}, \\ &\mathrm{Var}(V) = \mathrm{E}(V^2) - \mathrm{E}(V)^2 = \mathrm{E}[(Y - 1)^2] = \mathrm{E}(Y^2) - 2\,\mathrm{E}(Y) + 1 = 1, \\ &\mathrm{Var}(W) = \mathrm{E}(W^2) - \mathrm{E}(W)^2 = \mathrm{E}[(2X - 3Z)^2] = 4\,\mathrm{E}(X^2) - 12\,\mathrm{E}(XZ) + 9\,\mathrm{E}(Z^2) = \tfrac{5}{2}. \\ &\mathrm{Cov}(U, V) = \mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V) = \mathrm{E}[(X + Z)(Y - 1)] \\ &= \mathrm{E}(XY) + \mathrm{E}(ZY) - \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) = 0, \\ &\mathrm{Cov}(U, W) = \mathrm{E}(UW) - \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}[(X + Z)(2X - 3Z)] \\ &= 2E(X^2) - \mathrm{E}(XZ) - 3E(Z^2) = 0, \\ &\mathrm{Cov}(V, W) = \mathrm{E}(VW) - \mathrm{E}(V)\,\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}[(Y - 1)(2X - 3Z)] \\ &= 2E(XY) - 3E(ZY) - 2E(X) + 3E(Z) = 0. \end{aligned}$$

La matriz de covarianzas y su inversa son:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \qquad K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

El determinante vale $|K| = \frac{25}{4}$. Sustituyendo todo esto en la ecuación (2) sale:

$$f_{UVW}(u,v,w) = \frac{2}{5(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{5}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{5}w^2}.$$

Continuemos viendo algunas propiedades.

5) Dado un vector n-dimensional gaussiano $X_1, X_2, \ldots, X_n$, siempre es posible encontrar n variables $N_1, N_2, \ldots, N_n$ gaussianas de valor medio 0 y varianza 1, independientes, tales que todas las X_i se obtienen como combinación lineal de estas más un desplazamiento constante.

Así, podemos reducir un vector gaussiano a sus grados de libertad más simples. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 1.5

En el ejemplo anterior las nuevas variables U, V, W eran incorrelacionadas y, por tanto, tratándo-se de gaussianas, independientes. Tenían esperanza cero pero la desviación de U y W era diferente de 1. Eso lo podemos arreglar dividiendo estas dos variables por su desviación. El cambio de variable que nos interesa es:

$$\begin{cases} N_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}(X+Z) \\ N_2 = Y - 1 \\ N_3 = \sqrt{\frac{2}{5}}(2X - 3Z) \end{cases}$$

La función de densidad del vector (N_1, N_2, N_3) es:

$$f_{N_1N_2N_3}(n_1,n_2,n_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}n_1^2 - \frac{1}{2}n_2^2 - \frac{1}{2}n_3^2}.$$

En efecto, dado que las variables N_i son independientes, es el producto de las funciones de densidad marginal:

$$f_{N_1N_2N_3}(n_1,n_2,n_3) = \frac{e^{-\frac{n_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{n_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{n_3^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

En este subapartado hemos visto cómo se define un vector n-dimensional gaussiano y cómo se trabaja con él. Una vez visto este punto ya podemos dar el paso siguiente: a partir de esta definición, extenderemos el uso del vector n-dimensional al concepto de proceso estocástico gaussiano.

1.2. Proceso estocástico gaussiano

Llegamos al concepto de proceso gaussiano de manera natural, ya que un proceso se especifica por medio de la distribución de sus muestras, y estas son vectores n-dimensionales.

Definición 1.2. El proceso estocástico $X(t)$ es **gaussiano** si para todo $n \geq 1$ y para todo $t_1, t_2, \ldots, t_n$ las variables aleatorias $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ son conjuntamente gaussianas.

Se trata de un proceso de estado continuo. Las funciones de densidad de orden n valen:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)}, \qquad (4)$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $-\infty < x_i < \infty$. Dado que ahora las variables son $X(t_i)$, resulta que $m_i = \mathrm{E}(X(t_i))$ y $K_{i,j} = \mathrm{Cov}(X(t_i), X(t_j)), i, j = 1, 2, \ldots, n$. Estos valores están relacionados directamente con las funciones de valor medio $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$ y de autocovarianza $C(t_1, t_2) = \mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2))$. Así, en la densidad anterior $m = (m(t_1), m(t_2), \ldots, m(t_n))$ y $K_{i,j} = C(t_i, t_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Tenemos el resultado importante siguiente, que permite caracterizar los procesos gaussianos.

Proposición 1.1. La distribución de probabilidad de un proceso estocástico gaussiano queda completamente determinada por las funciones de valor medio y de autocorrelación.

Caracterización de un proceso gaussiano

Un proceso estocástico gaussiano queda estadísticamente determinado por las funciones $m(t)$ y $R(t_1, t_2)$.

Demostración: En efecto, conocidas $m(t)$ y $R(t_1, t_2)$, podemos escribir la densidad de cualquier muestra del proceso (recordemos que $C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2)$).■

Una vez definidos los procesos estocásticos gaussianos nos interesará centrarnos en un tipo particular: los procesos estocásticos gaussianos estacionarios. Recordad que la estacionariedad de un proceso estocástico está determinada por el hecho de tener una estadística invariable con el tiempo.

Véase también

La estacionariedad de un proceso estocástico se estudia en el módulo "Procesos estocásticos estacionarios".

1.3. Propiedades de los procesos gaussianos estacionarios

Hemos visto* que un proceso estocástico estacionario en sentido amplio es aquel que tiene el valor medio constante $m(t) = m$ y en el que la autocorrelación depende solo de la distancia entre los dos instantes de tiempo fijados, $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$. Podemos, pues, tener procesos gaussianos estacionarios en sentido amplio si elegimos los parámetros de esta manera. De hecho, estos procesos son también estacionarios en sentido estricto, ya que para los procesos gaussianos toda la estadística se obtiene a partir de $m(t)$ y $R(t_1, t_2)$, que ahora son invariantes bajo desplazamientos temporales.

* Véase la definición 1.2 del módulo "Procesos estocásticos estacionarios".

Proposición 1.2. Un proceso estocástico gaussiano es estacionario en sentido estricto si y solo si es estacionario en sentido amplio.

Estacionariedad de los procesos gaussianos

Un proceso estocástico gaussiano estacionario en sentido amplio también lo es en sentido estricto.

Demostración: Ya sabemos que todo proceso estacionario en sentido estricto también lo es en sentido amplio. Supongamos ahora que tenemos un proceso gaussiano estacionario en sentido amplio. Para serlo en sentido estricto es necesario que todas las densidades de orden $n \geq 1$ sean invariantes al hacer el cambio $t_i \to t_i + \tau$ para todo i. Esta invarianza se da, ya que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$ solo depende de los tiempos a través de $m(t)$, que ahora es constante, y de la matriz K, cuyos elementos son todos de la forma $C(t_i, t_j) = R(t_i - t_j) - m^2$. Al calcular $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau)$ solo debemos cambiar $C(t_i, t_j)$ por $C(t_i + \tau, t_j + \tau) = R[(t_i + \tau) - (t_j + \tau)] - m^2 = R(t_i - t_j) - m^2 = C(t_i, t_j)$. Es decir, la densidad queda igual. ■

Las figuras 1 y 2 muestran realizaciones de procesos gaussianos estacionarios y no estacionarios.

Figura 1. Proceso gaussiano no estacionario ($m(t) = \sin t$, línea punteada)

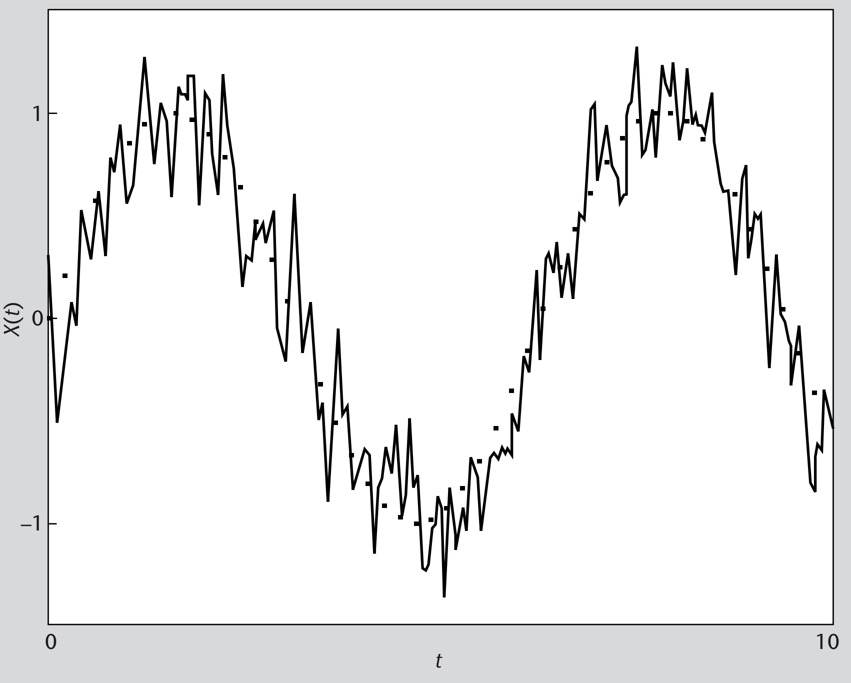

Figura 1

La media de este proceso gaussiano no es constante, depende del tiempo. Por lo tanto, sabemos que el proceso no es estacionario en sentido amplio y tampoco no lo es en sentido estricto.

Figura 2. Proceso gaussiano estacionario ($m = 1$, línea punteada)

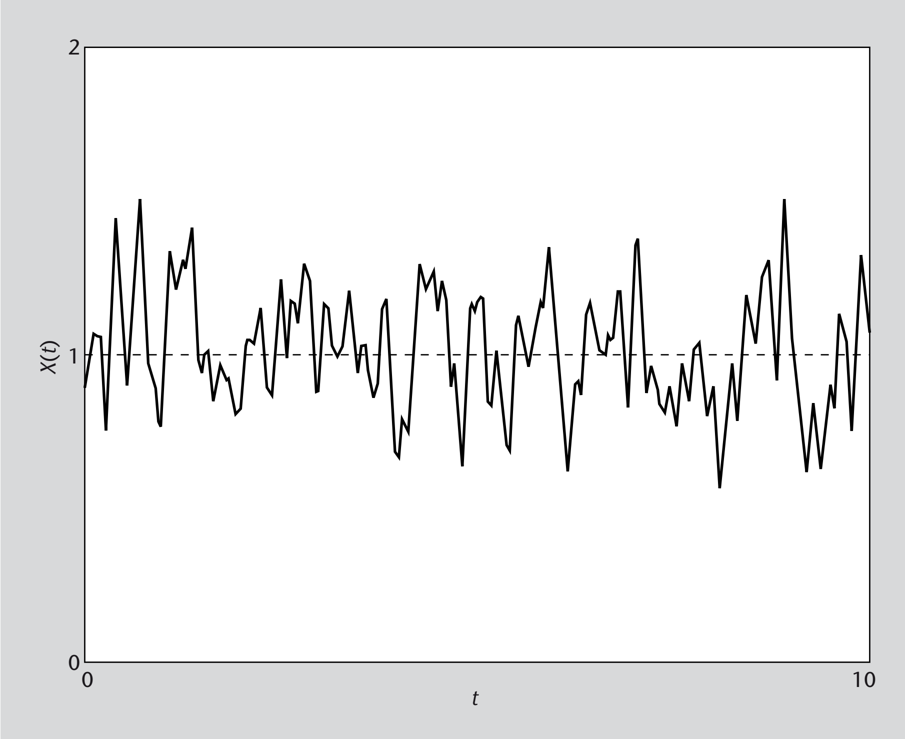

Figura 2

Observad la realización de un proceso estocástico gaussiano estacionario. Entre otras cosas, se cumple que la media m es una constante.

En el subapartado siguiente veremos un ejemplo de proceso estocástico gaussiano estacionario: el ruido blanco.

1.4. Ruido blanco

Antes de comenzar a ver este caso particular de proceso estocástico estacionario, debemos recordar la definición de la función delta de Dirac, ya que la utilizaremos en este subapartado.

Impulso instantáneo

La función delta de Dirac también se denomina impulso instantáneo, ya que es una función que vale infinito para $t = 0$ y cero para el resto de los valores.

Definición 1.3. La función **delta de Dirac** es una función generalizada que se representa como $\delta(t)$ y se define por su comportamiento bajo integración. Para cualquier función continua $\varphi(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)dt = \varphi(a). \tag{5}$$

Veamos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{6}$$

$\delta(t)$ se interpreta como un impulso instantáneo concentrado para $t = 0$. Una manera intuitiva de representarla es:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Podemos calcular la transformada de Fourier utilizando la ecuación (5):

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1.$$

Dado que $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, tenemos que la transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta(t)$. Así se obtiene la representación integral de la delta:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df. \tag{7}$$

Transformada de Fourier

Intuitivamente podemos esperar que la transformada de Fourier de una delta de Dirac sea una constante en frecuencia porque para $t = 0$ tenemos una variación de la señal infinita. Esto se traduce en una señal en frecuencia que contiene todas las frecuencias posibles. Inversamente, una señal en frecuencia que contiene todas las frecuencias posibles se traducirá, mediante la transformada inversa de Fourier, en una señal con variación temporal infinita.

Definición 1.4. Un proceso estocástico estacionario se denomina de **ruido blanco** si su espectro de potencia es constante $S(f) = s_0$ para $-\infty < f < \infty$. Entonces su función de autocorrelación vale

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0 e^{j2\pi f\tau} df = s_0 \delta(\tau), \tag{8}$$

donde se ha utilizado la representación integral de la delta de Dirac (ecuación (7)).

Observemos que la ecuación (8) nos dice que $R(t_1, t_2) = s_0\delta(t_2 - t_1)$. Ya hemos comentado que la delta es nula cuando su argumento es diferente a cero. Así $R(t_1, t_2) = 0$ para $t_1 \neq t_2$. Considerando que no existe correlación en instantes diferentes, el comportamiento del proceso es totalmente irregular. En este sentido, queda justificado denominarlo *ruido*. El término *blanco* está en analogía con la luz blanca, en la que están presentes todas las frecuencias (colores) con el mismo peso. Veamos un ejemplo de ruido blanco.

Ruido blanco y autocorrelación

La función de autocorrelación mide cómo fluctúa la señal a lo largo del tiempo, qué memoria o posible predicción de valores pasados o futuros tiene. La expresión (8) nos dice que el ruido blanco se parece a él mismo en un mismo instante de tiempo, pero que los valores anteriores o posteriores no tienen ningún tipo de relación con el valor actual.

Ejemplo 1.6

Un ejemplo de proceso de ruido blanco es un proceso gaussiano estacionario con $R(\tau) = \delta(\tau)$. En este caso los valores del proceso en instantes diferentes son variables independientes.

Figura 3. Proceso gaussiano de ruido blanco

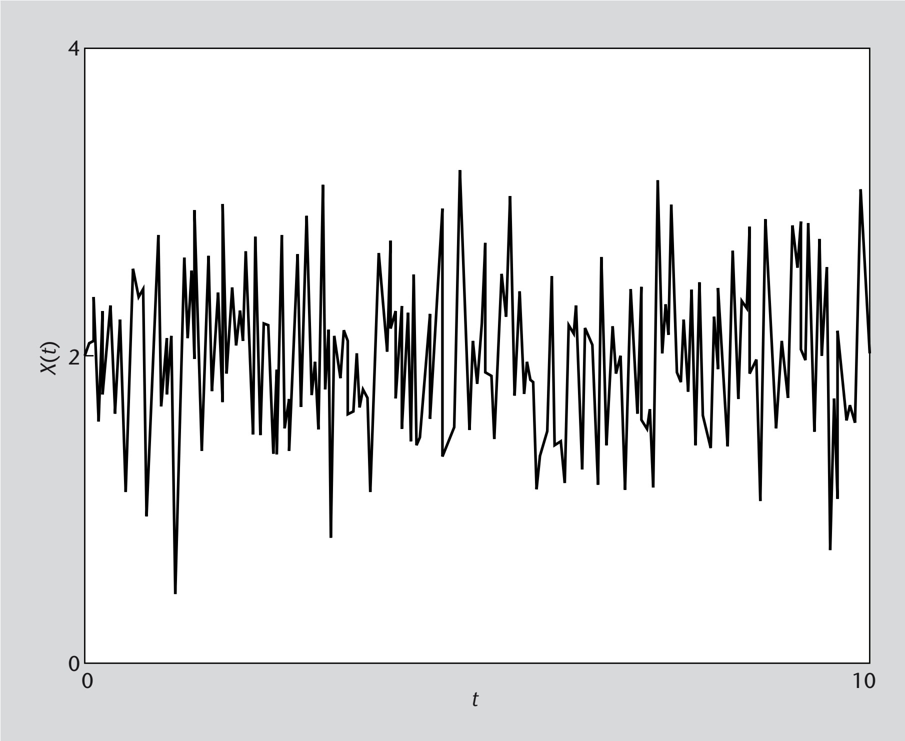

Figura 3

Un proceso gaussiano estacionario con $R(\tau) = \delta(\tau)$ es un ejemplo de ruido blanco.

2. El proceso estocástico de Poisson

Muchas situaciones en ingeniería implican la presencia de acontecimientos que se produjeron en instantes aleatorios con independencia unos de otros. En términos genéricos, un proceso de Poisson cuenta el número de veces que sucede un acontecimiento predeterminado en un intervalo de tiempo $[0, t)$. Por ejemplo, la llegada de llamadas a una centralita telefónica o de conexiones a un servidor de Internet. Si nos limitamos a contar el número de acontecimientos en un intervalo concreto, podemos definir la variable aleatoria discreta de Poisson tal como la vimos en el módulo "Variables aleatorias". Si, además, queremos tratar el tiempo de manera dinámica, necesitamos el proceso de Poisson.

2.1. El proceso de Poisson

Consideremos la situación en la que una serie de acontecimientos se producen en instantes aleatorios. Representamos como $N(t)$ el número de acontecimientos en el intervalo $[0, t)$ y $N(t_a, t_b)$ el número de acontecimientos en el intervalo $[t_a, t_b)$. Observemos que $N(t_a, t_b) = N(t_b) - N(t_a)$. Fijados t_a, t_b, el contador $N(t_a, t_b)$ es una variable aleatoria unidimensional.

Decimos que el proceso es de Poisson si:

- El número de acontecimientos en dos intervalos temporales disjuntos son variables aleatorias independientes.
- Si $N = N(t, t + \tau)$, entonces, para τ muy pequeño podemos aproximar $P(N=1) = \lambda\tau$ y rechazar $P(N > 1)$.

Entonces, podemos hacer la aproximación consistente a partir del tiempo en pequeños intervalos disjuntos y considerando variables de Bernoulli independientes que nos indican si en cada pequeño intervalo se ha producido un acontecimiento o no. Es posible dar el paso al límite y demostrar que la variable $N = N(t_a, t_b)$ tiene la función de probabilidad

$$P(N=n) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}, \tag{9}$$

donde $\alpha = \lambda(t_b - t_a)$ y $n = 0, 1, \ldots$ Es decir, fijado un intervalo cualquiera el contador de acontecimientos correspondiente es una variable de Poisson con parámetro α.

Definición 2.1. El **proceso estocástico de Poisson** consiste en tomar como función $N(t)$, el número total de acontecimientos producidos en el intervalo $[0, t)$.

Figura 4. Realización del proceso de Poisson

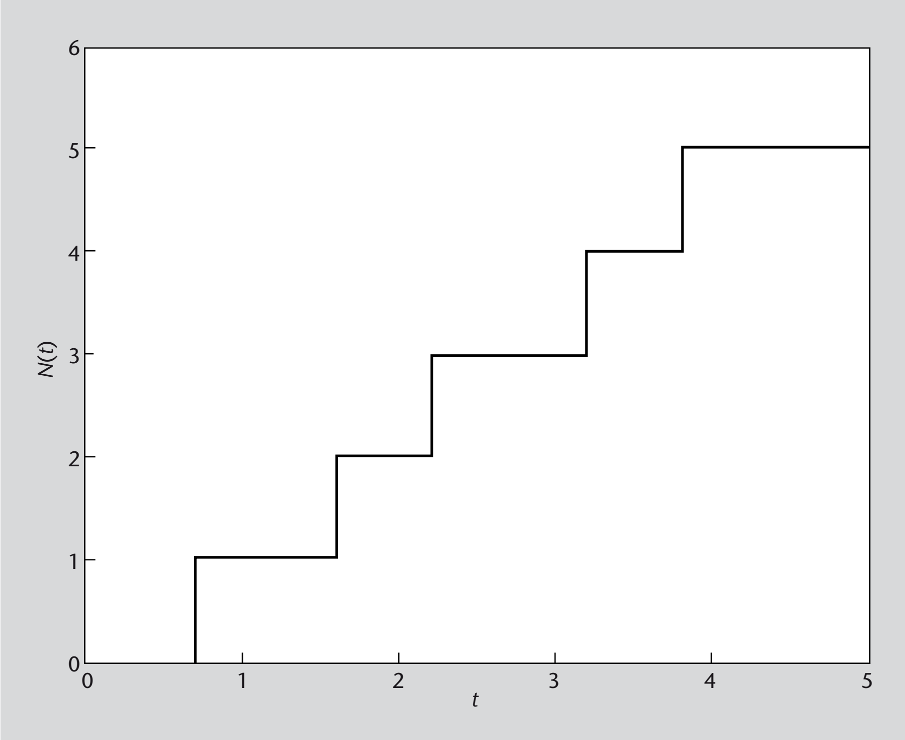

Figura 4

Un proceso de Poisson cuenta el número de veces que se produce un acontecimientos en un cierto intervalo de tiempo; por lo tanto, es un proceso discreto y escalonado.

Es un proceso a tiempo continuo y de estado discreto. Su función de probabilidad de primer orden es:

$$P(N(t)\!=\!n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

2.2. Parámetros del proceso de Poisson

Fijado t, $N(t)$ es una variable de Poisson de parámetro λt. Como sabemos, esta variable verifica $\mathrm{E}(N(t)) = \mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t$.

Véase también

Recordad los parámetros de la variable aleatoria de Poisson que vimos en el subapartado 2.1.4 del módulo "Variables aleatorias".

Entonces, para el proceso de Poisson:

$$m(t) = \lambda t, \tag{11}$$

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2, & \text{si } t_1 \leq t_2, \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2, & \text{si } t_1 > t_2. \end{cases} \tag{12}$$

Demostración: El valor medio es $m(t) = \mathrm{E}(N(t)) = \lambda t$.

Ahora consideramos $t_1 \leq t_2$. Las variables aleatorias $N(t_1)$ y $N(t_2) - N(t_1)$ son variables de Poisson $N(0, t_1)$ y $N(t_1, t_2)$ independientes, ya que sus intervalos son disjuntos. Entonces la autocorrelación es:

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \mathrm{E}[N(t_1)N(t_2)] = \mathrm{E}[N(t_1)(N(t_2) - N(t_1) + N(t_1))] \\ &= \mathrm{E}[N(t_1)(N(t_2) - N(t_1))] + \mathrm{E}[N(t_1)^2] \\ &= \mathrm{E}[N(t_1)]\,\mathrm{E}[(N(t_2) - N(t_1))] + \mathrm{E}[N(t_1)^2] \\ &= \mathrm{E}[N(t_1)]\,\mathrm{E}[N(t_2)] + \mathrm{E}[N(t_1)^2] - \mathrm{E}[N(t_1)]^2 \\ &= \mathrm{E}[N(t_1)]\,\mathrm{E}[N(t_2)] + \mathrm{Var}[N(t_1)] \\ &= \lambda t_1 \lambda t_2 + \lambda t_1. \end{aligned}$$

El caso $t_1 > t_2$ se obtiene intercambiando t_1 y t_2, ya que R es simétrica. ■

Podemos escribir $R(t_1, t_2) = \lambda \operatorname{mín}(t_1, t_2) + \lambda^2 t_1 t_2$. La función de autocovarianza es:

$$C(t_1, t_2) = \lambda \operatorname{mín}(t_1, t_2). \qquad (13)$$

Según la ecuación (11), el parámetro $\lambda = \frac{m(t)}{t}$, es decir, es el número medio de acontecimientos por unidad de tiempo. Observemos que el proceso de Poisson no es estacionario, ya que $m(t)$ depende de t.

Parámetro de un proceso de Poisson

El parámetro λ de un proceso de Poisson es el número medio de acontecimientos por unidad de tiempo. Recordad que lo habíamos visto en el subapartado 2.1.4 del módulo "Variables aleatorias".

Se resumen, a continuación, los parámetros más importantes de un proceso estocástico de Poisson.

Parámetros del proceso de Poisson

$$m(t) = \lambda t$$

$$R(t_1, t_2) = \lambda \operatorname{mín}(t_1, t_2) + \lambda^2 t_1 t_2$$

$$C(t_1, t_2) = \lambda \operatorname{mín}(t_1, t_2)$$

$$\mathrm{Pot}(t) = \lambda t + \lambda^2 t^2$$

A partir de las características de los procesos de Poisson haremos en el subapartado siguiente el estudio de una señal telegráfica aleatoria.

2.3. Señal telegráfica aleatoria

Dada la situación de llegada de acontecimientos de tipo Poisson, hemos construido un proceso tomando como función aleatoria el contador $N(t)$. En la misma situación podemos construir otras funciones. Estudiaremos primero el proceso $Z(t) = (-1)^{N(t)}$, consistente en un signo ± 1 que se va alternando.

Figura 5. Realización del proceso de señal telegráfica

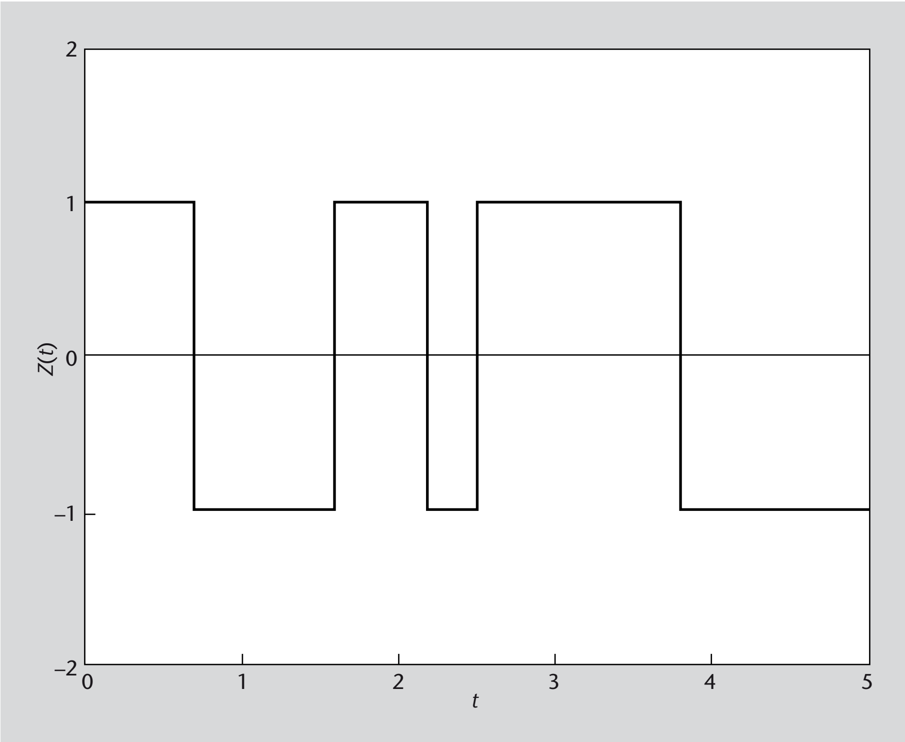

Figura 5

Construimos el proceso aleatorio de la figura con la expresión $Z(t) = (-1)^{N(t)}$, donde $N(t)$ es un proceso de Poisson. $Z(t) = 1$ cuando $N(t)$ es par y $Z(t) = -1$ cuando $N(t)$ es impar.

$Z(t)$ se trata de un proceso de estado discreto que solo puede tomar los valores $+1$ y -1.

La función de probabilidad de primer orden del proceso $Z(t) = (-1)^{N(t)}$ vale:

$$\begin{cases} P(Z(t)=1) = \dfrac{1+e^{-2\lambda t}}{2}, \\[2ex] P(Z(t)=-1) = \dfrac{1-e^{-2\lambda t}}{2}. \end{cases} \tag{14}$$

Demostración: Recordemos la serie de Taylor de la función exponencial. Para todo x,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{15}$$

La podemos separar en una parte par y una parte impar:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{16}$$

Ahora, que $Z(t)$ valga $+1$ o -1 corresponde al hecho de que $N(t)$ sea par o impar, respectivamente, de manera que:

$$P(Z(t)=1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=2k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!}$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda t}}{2}.$$

De manera análoga se obtiene $P(Z(t) = -1)$. ■

A partir de la ecuación (14) calculamos el valor medio:

$$\mathrm{E}(Z(t)) = 1 \cdot P(Z(t){=}1) + (-1) \cdot P(Z(t){=}{-1}) = e^{-2\lambda t},$$

y la autocorrelación (para $t_1 \leq t_2$):

$$\mathrm{E}(Z(t_1)Z(t_2)) = \mathrm{E}[(-1)^{N(t_1)}(-1)^{N(t_2)}] = \mathrm{E}[(-1)^{N(t_2)-N(t_1)}]$$

$$= \mathrm{E}[(-1)^{N(t_1,t_2)}] = e^{-2\lambda(t_2-t_1)},$$

ya que $(-1)^N = (-1)^{-N}$, y $N(t_1,t_2) = N(t_2) - N(t_1)$ vuelve a ser una variable de Poisson de parámetro $\lambda(t_2 - t_1)$. En general tendremos $\mathrm{E}(Z(t_1)Z(t_2)) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}$.

Figura 6. Autocorrelación $R(\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))$ en función de la diferencia de tiempo τ, para la señal telegráfica

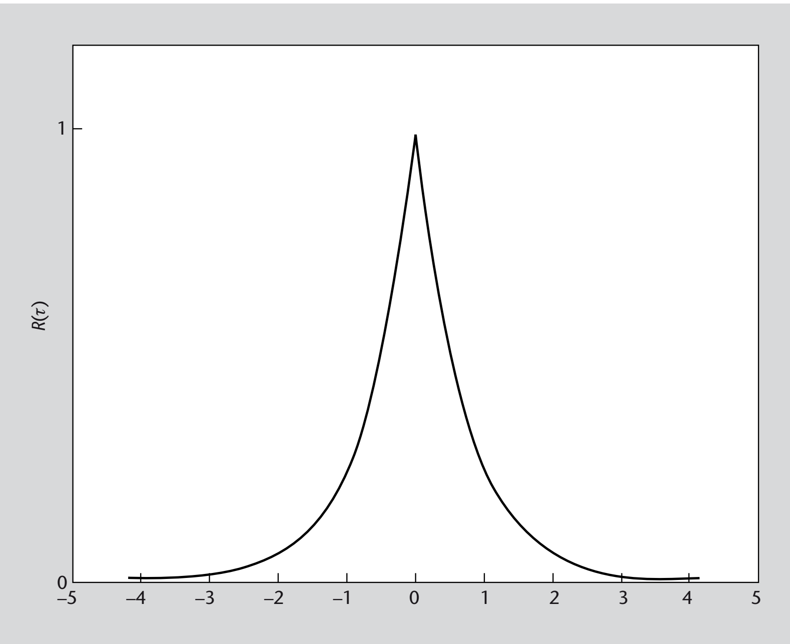

Figura 6

La autocorrelación de la señal telegráfica aleatoria es máxima cuando la señal se compara con ella misma y decae rápidamente a medida que desplazamos la señal.

La autocorrelación muestra un comportamiento lógico, ya que a medida que pasa el tiempo el signo de $Z(t)$ va cambiando varias veces y perdemos la correlación entre los dos instantes. También esperaríamos que el valor medio fuese cero. De hecho, $\mathrm{E}(Z(t))$ tiende a cero con una cierta rapidez a medida que aumenta t. El motivo es que $Z(0) = 1$ en todas las realizaciones, considerando que el contador $N(t)$ siempre comienza a 0.

Para evitar este efecto artificial de condición inicial hacemos la siguiente definición.

Definición 2.2. El **proceso estocástico de señal telegráfico aleatorio** es:

$$X(t) = S(-1)^{N(t)}, \tag{17}$$

donde $N(t)$ es el proceso de Poisson y S es una variable aleatoria que adquiere valores $+1$ y -1 con la misma probabilidad, independiente de $N(t)$.

Observemos que $\mathrm{E}(S) = 0$ y $S^2 = 1$. Ahora tenemos que:

$$m_X(t) = 0, \qquad R_X(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}. \tag{18}$$

Demostración:

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(S(-1)^{N(t)}) = \mathrm{E}(S)\,\mathrm{E}[(-1)^{N(t)}] = 0 \cdot e^{-2\lambda t} = 0,$$

$$R_X(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = \mathrm{E}(S^2 Z(t_1)Z(t_2)) = \mathrm{E}(Z(t_1)Z(t_2)) = e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}. \blacksquare$$

La señal telegráfica aleatoria es un proceso estacionario (al menos en sentido amplio) según se deduce del resultado anterior. A continuación se presentan los principales parámetros de la señal telegráfica aleatoria.

Parámetros de la señal telegráfica aleatoria:

$$m(t) = 0$$

$$R(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}$$

$$C(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}$$

$$\mathrm{Pot}(t) = 1$$

2.4. Distribución de los instantes de Poisson

En los procesos anteriores toda la información sobre el resultado del experimento está en la localización temporal del primer acontecimiento (T_1), la del segundo acontecimiento (T_2), etc. Por lo tanto, tiene interés estudiar la serie de variables aleatorias T_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ De hecho, los grados de libertad más simples son los intervalos entre acontecimientos $\Delta_1 = T_1$, $\Delta_2 = T_2 - T_1$, $\Delta_3 = T_3 - T_2$, etc.

Figura 7. Distribución de los intervalos de tiempo entre sucesos en un proceso de Poisson.

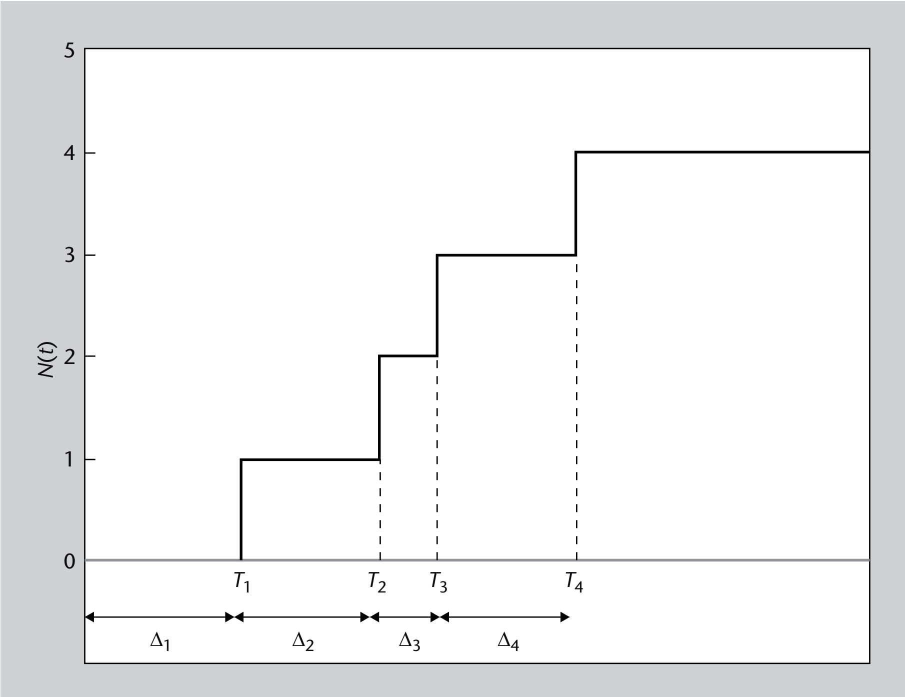

Figura 7

Los acontecimientos de Poisson se producen en instantes $T_1, T_2, \ldots$ Los intervalos entre estos instantes corresponden a las variables $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$

Se puede ver que las variables Δ_i son independientes, ya que los acontecimientos se producen de manera independiente unos de otros. Entonces, el tiempo que pasa desde T_i hasta que se produce el acontecimiento $i + 1$ es independiente de la localización de los acontecimientos anteriores. Además, las variables Δ_i son todas exponenciales de parámetro λ.

Proposición 2.1. En el proceso de Poisson el tiempo que transcurre entre acontecimientos consecutivos son variables exponenciales de parámetros λ independientes.

Demostración: Calculemos la función de distribución de Δ_i. Para $t \geq 0$,

$$F_{\Delta_i}(t) = P(\Delta_i \leq t) = 1 - P(\Delta_i > t).$$

Ahora, $\Delta_i > t$ equivale a decir que en el intervalo $[T_i, T_i + t)$ no habido ningún acontecimiento. Esto es la probabilidad P, independiente de T_i, que el contador asociado a un intervalo de longitud t valga 0, es decir, $P = e^{-\lambda t}$. Entonces $F_{\Delta_i}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, que es la distribución de una variable exponencial. ■

Una manera simple de simular un proceso de Poisson es ir obteniendo valores independientes de una variable exponencial de parámetro λ e irlos sumando para obtener los instantes en los que se producen los acontecimientos.

Resumen

En este modulo hemos visto dos tipos de procesos estocásticos concretos: los procesos gaussianos y los procesos de Poisson.

Procesos estocásticos gaussianos

Para poder definir los procesos estocásticos gaussianos es necesario definir primero el vector aleatorio gaussiano n-dimensional. Esta definición es una extensión de la definición de variable aleatoria gaussiana. Concretamente, el vector aleatorio $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es gaussiano si su densidad es:

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)}.$$

Los vectores aleatorios gaussianos tienen algunas propiedades interesantes:

- La distribución marginal de cualquier subconjunto de las variables del vector gaussiano también es gaussiana.
- La distribución de probabilidad de un vector aleatorio gaussiano queda determinada a partir de los parámetros de primer y segundo orden: esperanzas, varianzas y covarianzas.
- Las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, conjuntamente gaussianas, son independientes si y solo si están incorrelacionadas ($\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ para todo $i \neq j$).
- El carácter gaussiano se mantiene bajo transformaciones lineales.
- Dado un vector n-dimensional gaussiano $X_1, X_2, \ldots, X_n$, siempre es posible encontrar n variables $N_1, N_2, \ldots, N_n$ gaussianas de valor medio 0 y varianza 1, independientes, tales que todas las X_i se obtienen como combinación lineal de estas más un desplazamiento constante.

A partir de esta definición podemos definir el concepto de proceso estocástico gaussiano. Un proceso estocástico, $X(t)$, es gaussiano si las variables aleatorias $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ son conjuntamente gaussianas.

Para caracterizar este tipo de procesos utilizamos el resultado siguiente: la distribución de probabilidad de un proceso estocástico queda completamente determinada por las funciones de valor medio y de autocorrelación.

Respecto a la estacionariedad de los procesos estocásticos gaussianos, sabemos que son estacionarios en sentido estricto si y solo si lo son en sentido amplio.

Procesos estocásticos de Poisson

Un proceso de Poisson cuenta el número de veces que se produce un acontecimiento en un intervalo de tiempo definido, y lo representamos con $N(t)$. Este proceso se caracteriza por los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} m(t) &= \lambda t \\ R(t_1, t_2) &= \lambda \operatorname{mín}(t_1, t_2) + \lambda^2 t_1 t_2 \\ C(t_1, t_2) &= \lambda \operatorname{mín}(t_1, t_2) \\ \operatorname{Pot}(t) &= \lambda t + \lambda^2 t^2 \end{aligned}$$

Una variación de este tipo de procesos es la señal telegráfica aleatoria. En este caso hemos visto que los parámetros estadísticos son los siguientes:

$$\begin{aligned} m(t) &= 0 \\ R(t_1, t_2) &= e^{-2\lambda|t_2 - t_1|} \\ C(t_1, t_2) &= e^{-2\lambda|t_2 - t_1|} \\ \operatorname{Pot}(t) &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente, hemos estudiado cómo es la distribución del tiempo entre acontecimientos. Hemos visto que en los procesos estocásticos de Poisson el tiempo entre acontecimientos consecutivos son variables exponenciales independientes y con parámetro λ.

Actividades

1. a) Escribid la función de densidad conjunta de una variable gaussiana bidimensional (X, Y) tal que $\mathrm{E}(X) = 0$, $\mathrm{E}(Y) = 1$, $\mathrm{Var}(X) = 5$, $\mathrm{Var}(Y) = 10$ y $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Escribid la función de densidad marginal de la variable X del apartado anterior.

c) Escribid la función de densidad conjunta de una variable gaussiana bidimensional (X, Y) tal que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ y $\rho = \frac{1}{2}$.

d) Escribid la función de densidad conjunta de una variable gaussiana bidimensional (X, Y) tal que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$, $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 2$ y $\rho = 0$.

e) ¿Son independientes las variables X e Y en alguno de los apartados anteriores?

2. Un proceso estocástico gaussiano $X(t)$ tiene valor medio $m(t) = 1 + \cos \pi t$ y autocorrelación $R(t_1, t_2) = 5e^{-(t_2-t_1)^2}$.

a) Considerad la variable bidimensional $(X(1), X(2))$. Calculad sus esperanzas, varianzas y el coeficiente de correlación. Escribid su matriz de covarianzas.

b) ¿Cuál es la densidad de la variable aleatoria $X(0)$?

c) ¿Es $X(t)$ un proceso estacionario?

3. Un proceso estocástico gaussiano $X(t)$ tiene valor medio $m(t) = 1 + \alpha \cos \pi t$ (donde α es una constante) y autocorrelación $R(t_1, t_2) = 5e^{-(t_2-t_1)^2}$.

a) ¿Hay algún valor de α tal que el proceso sea estacionario?

b) En este caso, ¿es estacionario en sentido estricto, o solo en sentido amplio?

4. Considerad un proceso de Poisson $X(t)$ con parámetro $\lambda = 25$.

a) Calculad la esperanza y desviación típica de la variable $X(1)$.

b) Calculad la probabilidad de que $X(1) = 20$.

c) Demostrad que el coeficiente de correlación ρ entre $X(a)$ y $X(2a)$ es independiente del instante a y vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. Considerad el proceso $Y(t)$ gaussiano con valor medio $m_Y(t) = 0$ y con autocorrelación $R_Y(t_1, t_2) = \dfrac{1}{1 + (t_1 - t_2)^2}$.

a) ¿Podemos asegurar que es estacionario en sentido estricto?

b) Considerad la variable aleatoria bidimensional $(Y(0), Y(1))$. ¿Qué tipo de variable es? Escribid su función de densidad.

6. Un proceso gaussiano $X(t)$ tiene: valor medio $m_X(t) = 1$, autocorrelación $R_X(t_1, t_2) = 3 \cdot 2^{-|t_1-t_2|}$.

a) ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido amplio?

b) ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido estricto?

c) Considerad las variables aleatorias $A = X(0)$ y $B = X(1)$. Calculad $\mathrm{E}(A)$, $\mathrm{E}(B)$, $\mathrm{Var}(A)$, $\mathrm{Var}(B)$, $\mathrm{Cov}(A, B)$ y ρ.

d) ¿Qué tipo de variable es la variable bidimensional (A, B)? Escribid su densidad.

7. Un proceso estocástico gaussiano $X(t)$ tiene valor medio $m(t) = 0$ y autocorrelación $R(t_1, t_2) = 1 - (t_2 - t_1)^2$ si $|t_1 - t_2| < 1$ y $R(t_1, t_2) = 0$ en caso contrario.

a) ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido amplio?

b) ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido estricto?

c) Calculad la función de densidad de primer orden $f(x;\ t)$ de este proceso.

d) Calculad la densidad espectral de potencia $S(f)$ del proceso $X(t)$.

8. Un proceso estocástico gaussiano $X(t)$ tiene valor medio $m(t) = 1$ y autocorrelación $R(t_1, t_2) = \frac{2}{1+|t_2-t_1|}$.

a) ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido amplio?

b) ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido estricto?

c) Calculad la función de densidad de la variable aleatoria $X(1)$.

9. Los errores que se producen a lo largo del tiempo en un sistema de comunicación se cuentan con un proceso de Poisson $X(t)$ con parámetro $\lambda = 2$.

a) Calculad, en función de t, la probabilidad $P(X(t) \leq 2)$ y demostrad que es decreciente para todo $t > 0$.

b) Calculad las esperanzas, las varianzas y el coeficiente de correlación de la variable bidimensional $(X(3), X(5))$.

10. Un proceso estocástico gaussiano $X(t)$ tiene valor medio $m(t) = 2$ y autocorrelación $R(t_1, t_2) = \dfrac{5 + (t_2 - t_1)^2}{1 + (t_2 - t_1)^2}$.

a) ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido amplio?

b) ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido estricto?

c) Calculad la función de densidad de la variable aleatoria $X(0)$.

11. El número de conexiones a un servidor entre los instantes 0 y t se representa con un proceso de Poisson $X(t)$ de parámetro $\lambda = 10$.

a) Escribid las funciones de valor medio y de autocorrelación de $X(t)$.

b) Calculad en qué instantes son máximas y cuál es este valor máximo que adquieren las probabilidades $P(X(t) = 10)$ y $P(X(t) = 15)$.

c) Calculad las esperanzas, las varianzas y el coeficiente de correlación de la variable bidimensional $(X(1), X(2))$.

12. Un proceso estocástico gaussiano $X(t)$ tiene valor medio $m(t) = 3$ y autocorrelación $R(t_1, t_2) = 9 + 2\cos^2(t_2 - t_1)$.

a) ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido amplio?

b) ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido estricto?

c) Calculad la función de densidad de la variable aleatoria $X(1)$.

13. Las conexiones a una intranet se pueden modelizar con un proceso de Poisson $X(t)$ de parámetro $\lambda = 1$ (expresando el tiempo en minutos).

a) Escribid las funciones de valor medio y de autocorrelación de $X(t)$. Calculad el coeficiente de correlación, ρ, de la variable bidimensional $(X(5), X(20))$.

b) Un test de buen funcionamiento consiste en contar las conexiones durante un periodo de 5 minutos. Si estas son como mínimo 2 y como máximo 8, decidimos que el sistema funciona correctamente. ¿Cuál es la probabilidad de que, funcionando bien el sistema, lleguemos a una conclusión errónea?

14. Tenemos un generador de procesos gaussianos $X(t)$, que nos deja elegir la función de valor medio entre $m_1(t) = 3$, $m_2(t) = \sin t$ y $m_3(t) = t - 4$. La función de autocovarianza se puede elegir entre $C_1(t_1, t_2) = 25e^{-t_1^2 - t_2^2}$, $C_2(t_1, t_2) = 17e^{-t_1^2 + 2t_1t_2 - t_2^2}$, y $C_3(t_1, t_2) = 20e^{t_2^2 - t_1^2}$.

a) ¿Qué funciones debemos elegir para que $X(t)$ sea estacionario en sentido amplio?

b) En este caso, ¿es $X(t)$ estacionario en sentido estricto?

c) Si elegimos m_1 y C_1, escribid la función de autocorrelación del proceso resultante y encontrad cuánto tiempo debe pasar a partir de $t = 0$ para que la potencia se reduzca a la mitad.

15. La llegada de mensajes a un centro de comunicaciones está descrita para un proceso de Poisson $X(t)$ de parámetro $\lambda = 2$ mensajes por segundo.

a) Escribid las funciones de valor medio y de autocorrelación de $X(t)$. ¿Cuál es el número medio de mensajes que llegan durante una hora?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no llegue ningún mensaje en un intervalo de 2 segundos?

c) Resulta que pasados 4 segundos se han recibido 13 mensajes. Calculad la esperanza y desviación de $X(4 \text{ segundos})$ y decid si el valor medido os parece normal.

d) Para poder valorar el número de mensajes recibidos pasada una hora y media sabiendo cuántos han llegado durante la primera hora, necesitamos el coeficiente de correlación, ρ, entre las variables aleatorias $X(1 \text{ horas})$ y $X(1{,}5 \text{ horas})$. Calculadlo.

16. Un generador para simulaciones nos permite obtener procesos con función de valor medio $m(t) = \alpha + \beta \sin t$ y autocovarianza $C(t_1, t_2) = \gamma \cos(t_1 - t_2) + \delta \cos^2(t_1 + t_2)$, donde α, β, γ, δ son constantes que podemos fijar arbitrariamente.

a) Encontrad los valores de las constantes α, β, γ, δ tales que el proceso es estacionario en sentido amplio, con valor medio 2 y potencia 7.

b) Para $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, ¿cuáles son los valores máximo y mínimo que adquiere la potencia del proceso resultante?

c) El generador nos permite obtener procesos gaussianos. Generamos dos: $X_1(t)$ con $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$, y $X_2(t)$ con $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\gamma = 1$. ¿Alguno de estos es estacionario en sentido amplio? ¿Alguno es estacionario en sentido estricto?

d) Considerad un proceso gaussiano con $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\delta = 0$. Escribid la función de densidad de la variable bidimensional $(X(0), X(\frac{\pi}{2}))$. ¿Son independientes estas variables?

17. Las conexiones que recibe un servidor a lo largo del tiempo siguen un proceso de Poisson $X(t)$ de parámetro $\lambda = 3$ conexiones por minuto.

a) Considerad la variable que da el número de conexiones hasta $t = 5$ minutos. Calculad su valor medio m y la desviación típica σ. Haced lo mismo para el número de conexiones hasta $t = 1$ hora. Decid, en cada caso, si un valor observado que difiera del valor medio en un 25 % se debe considerar excepcional.

b) Decidimos que hay algún problema en la red si $X(5 \text{ min}) < m - 2\sigma$. ¿Cuál es la probabilidad de que, funcionando bien la red, lleguemos a la decisión equivocada?

c) Denominamos ritmo de conexiones el proceso $Y(t) = \frac{X(t)}{t}$. Calculad el valor medio y la autocorrelación. ¿Es estacionario?

d) Calculad la esperanza y la varianza de la variable $Y(1 \text{ hora})$. ¿Podemos considerar que el valor medido de esta variable es una buena estimación de λ? Si consideramos $Y(t)$ para t muy grande, ¿mejora o empeora la validez de la estimación?

18. Dado un proceso $X(t)$ de señal telegráfica aleatoria de parámetro λ:

a) Considerad el nuevo proceso $Z(t) = \frac{X(t)+1}{2}$. Calculad su valor medio y la autocorrelación. ¿Es $Z(t)$ estacionario en sentido amplio?

b) Calculad el espectro de potencia de $X(t)$. Dibujad la autocorrelación $R(\tau)$ y el espectro de potencia $S(f)$ para $\lambda = 0,3$, para $\lambda = 1$ y para $\lambda = 5$.

(Indicación: observad que, en general, $S(f) = 2\int_0^\infty R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$.)

Solucionario

1. Utilizamos las fórmulas (3) y (1).

a) $m_X = 0, m_Y = 1, \sigma_X = \sqrt{5}, \sigma_Y = \sqrt{10}$.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{5}\sqrt{10}\sqrt{1-(1/\sqrt{2})^2}} e^{-\frac{1}{2(1-(1/\sqrt{2})^2)}\left(\frac{(x-0)^2}{5} - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-0)(y-1)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} + \frac{(y-1)^2}{10}\right)}$$

$$= \frac{1}{10\pi} e^{-\frac{1}{10}\{2x^2+y^2-2xy+2x-2y+1\}}.$$

b) $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{5}} e^{-\frac{(x-0)^2}{2\sqrt{5}^2}} = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{x^2}{10}}$.

c) $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{2}{3}\{x^2+y^2-xy\}}$.

d) $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}\{2x^2+y^2\}}$.

e) Dos variables gaussianas son independientes si y solo si son incorrelacionadas ($\rho = 0$). Por lo tanto, solo son independientes X e Y en el apartado *d*.

2. a) $\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 1 + \cos\pi = 0$, $\mathrm{E}(X(2)) = m(2) = 1 + \cos 2\pi = 2$, $\mathrm{Var}(X(1)) = C(1,1) = R(1,1) - m(1)^2 = 5$, $\mathrm{Var}(X(2)) = C(2,2) = R(2,2) - m(2)^2 = 5 - 4 = 1$, $\mathrm{Cov}(X(1), X(2)) = C(1,2) = R(1,2) - m(1)m(2) = 5e^{-1}$, $K = \begin{pmatrix} 5 & 5e^{-1} \\ 5e^{-1} & 1 \end{pmatrix}$.

b) $X(0)$ es una variable gaussiana con esperanza $m(0) = 1 + \cos 0 = 2$ y varianza $C(0,0) = R(0,0) - m(0)^2 = 5 - 4 = 1$. Su densidad es $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$.

c) No, porque $m(t)$ no es constante.

3. a) Para ser estacionario, necesariamente $m(t)$ debe ser constante y $R(t, t+\tau)$ no ha de depender de t. Dado que $R(t, t+\tau) = 5e^{-\tau^2}$, la segunda condición ya sucede. Para que pase la primera, debe ser $\alpha = 0$.

b) Las condiciones anteriores aseguran que el proceso es estacionario en sentido amplio. Pero, tratándose de un proceso gaussiano, esto implica que el proceso es estacionario en sentido estricto.

4. a) Para el proceso de Poisson $E(X(t)) = \mathrm{Var}(X(t)) = \lambda t$. Así, $\mathrm{E}(X(1)) = \mathrm{Var}(X(1)) = 25$.

b) $P(X(1) = 20) = e^{-25}\frac{(25)^{20}}{20!} = 0{,}0519$.

c) $\mathrm{Var}(X(a)) = 25a, \mathrm{Var}(X(2a)) = 50a$. $\mathrm{Cov}(X(a), X(2a)) = C(a, 2a) = 25\,\text{mín}(a, 2a) = 25a$. Así, $\rho = \frac{25a}{\sqrt{25a}\sqrt{50a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. a) Sí, ya que si un proceso gaussiano es estacionario en sentido amplio, entonces también lo es en sentido estricto.

b) Es una variable gaussiana, ya que, por definición, todas las muestras de un proceso gaussiano son variables gaussianas multidimensionales. Para escribir su densidad necesitamos los parámetros.

$\mathrm{E}(Y(0)) = m_Y(0) = 0$. $\mathrm{E}(Y(1)) = m_Y(1) = 0$. $\mathrm{E}(Y(0)^2) = R_Y(0,0) = 1$. $\mathrm{E}(Y(1)^2) = R_Y(1,1) = 1$. $\mathrm{E}(Y(0)Y(1)) = R_Y(0,1) = 1/2$. $\mathrm{Var}(Y(0)) = 1, \mathrm{Var}(Y(1)) = 1$,

$\mathrm{Cov}(Y(0), Y(1)) = 1/2, \rho = 1/2$.

$$f(y_0, y_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-(1/2)^2}} e^{-\frac{1}{2(1-(1/2)^2)}\left(\frac{(y_0-0)^2}{1^2} - 2\frac{1}{2}\frac{(y_0-0)(y_1-0)}{1\cdot 1} + \frac{(y_1-0)^2}{1^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}\left(y_0^2+y_1^2-y_0y_1\right)}.$$

6. a) $X(t)$ es estacionario en sentido amplio, ya que $m_X(t)$ es constante y $R_X(t_1, t_2)$ depende solo de la diferencia de tiempo: $R_X(t, t+\tau) = 3 \cdot 2^{-|\tau|}$.

b) Sí, ya que si un proceso gaussiano es estacionario en sentido amplio, entonces también lo es en sentido estricto.

c) $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(X(0)) = m_X(0) = 1$. $\mathrm{E}(B) = \mathrm{E}(X(1)) = m_X(1) = 1$.

$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(X(0)^2) = \mathrm{E}(X(0)X(0)) = R_X(0,0) = 3 \cdot 2^{-|0-0|} = 3$.

$\mathrm{E}(B^2) = \mathrm{E}(X(1)^2) = \mathrm{E}(X(1)X(1)) = R_X(1,1) = 3 \cdot 2^{-|1-1|} = 3$.

$\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(X(0)X(1)) = R_X(0,1) = 3 \cdot 2^{-|0-1|} = \frac{3}{2}$.

$\mathrm{Var}(A) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(A)^2 = 3 - 1^2 = 2$. $\mathrm{Var}(B) = \mathrm{E}(B^2) - \mathrm{E}(B)^2 = 3 - 1^2 = 2$.

$\mathrm{Cov}(A,B) = \mathrm{E}(AB) - \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$. $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(A,B)}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$.

d) (A, B) es una variable gaussiana, ya que, por definición, todas las muestras de un proceso gaussiano son variables gaussianas multidimensionales. Para escribir su densidad necesitamos los parámetros, calculados en el apartado anterior.

$$f(a,b) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-(1/4)^2}} e^{-\frac{1}{2(1-(1/4)^2)}\left(\frac{(a-1)^2}{2} - 2\frac{1}{4}\frac{(a-1)(b-1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} + \frac{(b-1)^2}{2}\right)} =$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{15}} e^{-\frac{4}{15}\left((a-1)^2+(b-1)^2-\frac{1}{2}(a-1)(b-1)\right)} = \frac{1}{\pi\sqrt{15}} e^{-\frac{2}{15}\{2a^2+2b^2-ab-3a-3b+3\}}.$$

7. a) $X(t)$ es estacionario en sentido amplio, ya que $m(t)$ es constante y $R(t_1, t_2)$ depende solo de la diferencia de tiempo: $R(t, t+\tau) = 1 - \tau^2$ si $|\tau| < 1$ y $R(t, t+\tau) = 0$ en caso contrario.

b) Sí, ya que si un proceso gaussiano es estacionario en sentido amplio, entonces también lo es en sentido estricto.

c) Con t fijado, $X(t)$ es una variable aleatoria gaussiana. Para escribir la densidad de primer orden introducimos los parámetros $m = \mathrm{E}(X(t)) = m(t) = 0$ y $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - 0^2 = R(t,t) = 1$ en la fórmula de la densidad gaussiana:

$$f(x;\ t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

d)

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau = 2\int_0^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$$

$$= 2\int_0^1 (1-\tau^2)\cos(2\pi f\tau)d\tau = 2\left(\left[(1-\tau^2)\frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi f}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi f}\int_0^1 \tau\sin(2\pi f\tau)d\tau\right)$$

$$= \frac{2}{\pi f}\left[-\tau\frac{\cos(2\pi f\tau)}{2\pi f} + \frac{\sin(2\pi f\tau)}{(2\pi f)^2})\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi^3 f^3}(\sin(2\pi f) - 2\pi f\cos(2\pi f)).$$

8. a) $X(t)$ es estacionario en sentido amplio, ya que $m(t)$ es constante y $R(t_1, t_2)$ depende solo de la diferencia de tiempo: $R(t, t+\tau) = \frac{2}{1+|\tau|}$.

b) Sí, ya que si un proceso gaussiano es estacionario en sentido amplio, entonces también lo es en sentido estricto.

c) $X(1)$ es una variable aleatoria gaussiana. Para escribir la densidad de primer orden introducimos los parámetros $m = \mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 1$ y $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X(1)) = \mathrm{E}(X(1)^2) - 1^2 = R(1,1) - 1 = 1$ en la fórmula de la densidad gaussiana:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

9. a) Observamos que $P(X(t) = n) = e^{-2t}\frac{(2t)^n}{n!}$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(X(t) \leq 2) = P(X(t)=0) + P(X(t)=1) + P(X(t)=2) = e^{-2t}(1 + 2t + 2t^2).$$

Derivando la expresión anterior respecto a t se obtiene $-4t^2e^{-2t}$, que es negativa para todo $t > 0$.

b) Tenemos $m(t) = 2t$ y $C(t_1, t_2) = 2\min(t_1, t_2)$. Entonces $\mathrm{E}(X(3)) = m(3) = 6$, $\mathrm{E}(X(5)) = m(5) = 10$, $\mathrm{Var}(X(3)) = C(3,3) = 6$, $\mathrm{Var}(X(5)) = C(5,5) = 10$, $\mathrm{Cov}(X(3), X(5)) = C(3,5) = 6$ y $\rho = \dfrac{6}{\sqrt{6}\sqrt{10}} = 0{,}7745$.

10. a) $X(t)$ es estacionario en sentido amplio, ya que $m(t)$ es constante y $R(t_1, t_2)$ depende solo de la diferencia de tiempo: $R(t, t+\tau) = \frac{5+\tau^2}{1+\tau^2}$.

b) Sí, ya que si un proceso gaussiano es estacionario en sentido amplio, entonces también lo es en sentido estricto.

c) $X(0)$ es una variable aleatoria gaussiana. Para escribir la densidad introducimos los parámetros $m = \mathrm{E}(X(0)) = m(0) = 2$ y $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X(0)) = \mathrm{E}(X(0)^2) - 2^2 = R(0,0) - 4 = 1$ en la fórmula de la densidad gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}.$$

11. a) $m(t) = 10t$, $R(t_1, t_2) = 100t_1t_2 + 10\min(t_1, t_2)$.

b) Observamos que $P(X(t) = n) = e^{-10t}\dfrac{(10t)^n}{n!}$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Para encontrar para qué valor de t es máxima hacemos:

$$0 = \frac{d}{dt}P(X(t) = n) = \frac{e^{-10t}}{n!}(-10(10t)^n + n10(10t)^{n-1}).$$

La solución es $t = \dfrac{n}{10}$ y $P(X(\dfrac{n}{10}) = n) = e^{-n}\dfrac{n^n}{n!}$. Así, $P(X(t) = 10)$ es máxima en $t = 1$, donde vale 0,1251, y $P(X(t) = 15)$ es máxima en $t = 1{,}5$, donde vale 0,1024.

c) Observamos que $C(t_1, t_2) = 10\min(t_1, t_2)$. Entonces $\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 10$, $\mathrm{E}(X(2)) = m(2) = 20$, $\mathrm{Var}(X(1)) = C(1,1) = 10$, $\mathrm{Var}(X(2)) = C(2,2) = 20$, $\mathrm{Cov}(X(1), X(2)) = C(1,2) = 10$ y $\rho = \dfrac{10}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = 0{,}7071$.

12. a) $X(t)$ es estacionario en sentido amplio, ya que $m(t)$ es constante y $R(t_1, t_2)$ depende solo de la diferencia de tiempo: $R(t, t+\tau) = 9 + 2\cos^2\tau$.

b) Sí, ya que si un proceso gaussiano es estacionario en sentido amplio, entonces también lo es en sentido estricto.

c) $X(1)$ es una variable aleatoria gaussiana. Para escribir la densidad introducimos los parámetros $m = \mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 3$ y $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X(1)) = \mathrm{E}(X(1)^2) - 3^2 = R(1,1) - 9 = 2$ en la fórmula de la densidad gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{4}}.$$

13. a) $m(t) = t$, $R(t_1, t_2) = t_1 t_2 + \text{mín}(t_1, t_2)$.

Veamos que $C(t_1, t_2) = \text{mín}(t_1, t_2)$. Entonces $\text{E}(X(5)) = m(5) = 5$, $\text{E}(X(20)) = m(20) = 20$, $\text{Var}(X(5)) = C(5, 5) = 5$, $\text{Var}(X(20)) = C(20, 20) = 20$,

$\text{Cov}(X(5), X(20)) = C(5, 20) = 5$ y $\rho = \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{20}} = 0{,}5$.

b) Observamos que $P(X(t) = n) = e^{-t}\dfrac{t^n}{n!}$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(\text{error}) = 1 - P(2 \leq X(5) \leq 8) = 1 - \sum_{n=2}^{8} e^{-5}\frac{5^n}{n!} = 1 - e^{-5}\left(\frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \cdots + \frac{5^8}{8!}\right) = 0{,}1085.$$

14. a) $m(t)$ debe ser constante, de manera que debemos elegir $m_1(t)$. $C(t, t+\tau)$ no debe depender de t, hecho que solo verifica $C_2(t_1, t_2)$. En efecto, $C_2(t, t+\tau) = 17e^{-t^2+2t(t+\tau)-(t+\tau)^2} = 17e^{-\tau^2}$.

b) Sí, ya que si un proceso gaussiano es estacionario en sentido amplio, entonces también lo es en sentido estricto.

c) Eligiendo m_1 y C_1, la potencia vale $R(t, t) = C(t, t) + m(t)^2 = 25e^{-2t^2} + 9$. En $t = 0$ vale 34. Cuando se ha reducido a la mitad $25e^{-2t^2} + 9 = 17$, y entonces $t = \sqrt{-\ln(8/25)/2} = 0{,}75$.

15. a) Trabajaremos en segundos. $m(t) = 2t$, $R(t_1, t_2) = 4t_1 t_2 + 2\,\text{mín}(t_1, t_2)$.

En una hora llegan de media $m(3.600) = 7.200$ mensajes.

b) Observamos que $P(X(t) = n) = e^{-2t}\dfrac{(2t)^n}{n!}$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$. La probabilidad pedida es $P(X(2) = 0) = e^{-4} = 0{,}0183$.

c) $X(t)$ para t fijado es una variable de Poisson de parámetro λt. Así, $X(4)$ tiene esperanza 8 y varianza 8. La desviación es $\sqrt{8} = 2{,}8$. El valor 13 difiere de 8 en casi dos desviaciones, de manera que parece anormalmente alto.

d) $C(t_1, t_2) = 2\,\text{mín}(t_1, t_2)$. Entonces, $\text{E}(X(5)) = m(5) = 5$, $\text{E}(X(20)) = m(20) = 20$, $\text{Var}(X(3.600)) = C(3.600, 3.600) = 7.200$, $\text{Var}(X(5.400)) = C(5.400, 5.400) = 10.800$, $\text{Cov}(X(3.600), X(5.400)) = C(3.600, 5.400) = 7.200$ y $\rho = \dfrac{7.200}{\sqrt{7.200}\sqrt{10.800}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = 0{,}8165$.

16. a) Como $m(t) = \alpha + \beta \sin t$ ha de ser constante, $\beta = 0$. Como $C(t, t+\tau) = \gamma\cos\tau + \delta\cos^2(2t+\tau)$ ha de ser independiente de t, $\delta = 0$. Tenemos ahora $m(t) = \alpha = 2$ y $C(t_1, t_2) = \gamma\cos(t_2 - t_1)$. Así $R(t_1, t_2) = C(t_1, t_2) + m(t_1)m(t_2) = \gamma\cos(t_2 - t_1) + 4$. La potencia es $R(t, t) = \gamma + 4 = 7$, y entonces $\gamma = 3$. Debe ser, pues, $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 3$, $\delta = 0$.

b) $\text{Pot} = R(t, t) = C(t, t) + m(t)^2 = 1 + (3 + 2\sin t)^2$. El máximo es 26, cuando $\sin t = 1$. El mínimo es 2, cuando $\sin t = -1$.

c) Tal como se ha visto en el apartado *a*, el proceso es estacionario en sentido amplio solo para $\beta = \delta = 0$. $X_2(t)$ es el único que es estacionario en sentido amplio. Tratándose de un proceso gaussiano, también es estacionario en sentido estricto.

d) Observamos que $\text{E}(X(t)) = m(t) = 1 + \sin t$, $\text{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1, t_2) = \cos(t_1 - t_2)$.

$(X(0), X(\frac{\pi}{2}))$ es una variable bidimensional gaussiana con parámetros:

$m_1 = m(0) = 1$, $m_2 = m(\frac{\pi}{2}) = 2$, $\sigma_1^2 = C(0, 0) = 1$, $\sigma_2^2 = C(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1$, $\rho = \frac{C(0, \frac{\pi}{2})}{\sigma_1\sigma_2} = 0$.

Utilizando la fórmula (3), la densidad es:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}((x_1-1)^2+(x_2-2)^2)}.$$

Son variables independientes (gaussianas incorrelacionadas).

17. a) Fijado t, $X(t)$ es una variable de Poisson de esperanza y varianza iguales a λt. Para $X(5)$, $m = 15$, $\sigma = \sqrt{15} = 3{,}9$. Para $t = 1$ hora, es $X(60)$ con $m = 180$, $\sigma = \sqrt{180} = 13{,}4$.

Para $X(5)$ el 25 % de m es 3,8, comparable con σ y, por lo tanto, dentro de las fluctuaciones normales. Para $X(60)$ el 25 % de m es 45, más de tres veces σ y, por lo tanto, de carácter excepcional.

b) Se trata de $P(X(5) < 7{,}2) = \sum_{n=0}^{7} e^{-15}\frac{15^n}{n!} = 0{,}018$.

c) Trabajaremos en minutos. $m_X(t) = 3t$, $R_X(t_1,t_2) = 9t_1t_2 + 3\,\text{mín}(t_1,t_2)$.

$$m_Y(t) = \text{E}(Y(t)) = \text{E}\left(\frac{X(t)}{t}\right) = \frac{\text{E}(X(t))}{t} = \frac{m_X(t)}{t} = 3.$$

$$R_Y(t_1,t_2) = \text{E}(Y(t_1)Y(t_2)) = \frac{\text{E}(X(t_1)X(t_2))}{t_1t_2} = \frac{\text{E}(X(t_1)X(t_2))}{t_1t_2} = \frac{R_X(t_1,t_2)}{t_1t_2} = 9 + 3\frac{\text{mín}(t_1,t_2)}{t_1t_2}.$$

No es estacionario ya que, aunque $m_Y(t)$ es constante, $R_Y(t_1,t_2)$ no depende solo de la diferencia de tiempo.

d) $\text{E}(Y(60)) = m_Y(60) = 3$. $\text{E}(Y(60)^2) = R_Y(60,60) = 9 + \frac{3}{60}$. $\text{Var}(Y(60)) = 9 + \frac{1}{20} - 3^2 = \frac{1}{20}$. La desviación vale $\sigma = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0{,}22$, de manera que la estimación se puede considerar relativamente buena. En general, tenemos que para la variable $Y(t)$ la desviación típica vale $\sqrt{\frac{3}{t}}$, de manera que la estimación es más fiable cuanto mayor sea t.

18. Según la ecuación (18), $m_X(t) = 0$, $R_X(t_1,t_2) = e^{-2\lambda|t_1-t_2|}$.

a) $m_Z(t) = \text{E}\left(\frac{X(t)+1}{2}\right) = \frac{\text{E}(X(t))+1}{2} = \frac{m_X(t)+1}{2} = \frac{1}{2}$.

$$R_Z(t_1,t_2) = \text{E}(Z(t_1)Z(t_2)) = \text{E}\left(\frac{X(t_1)+1}{2}\cdot\frac{X(t_2)+1}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{4}(R_X(t_1,t_2) + m_X(t_1) + m_X(t_2) + 1) = \frac{1}{4}(1 + e^{-2\lambda|t_1-t_2|}).$$

$Z(t)$ es estacionario en sentido amplio, ya que m_Z es constante y R_Z solo depende de $t_2 - t_1$.

b) Tenemos $R_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$. El espectro de potencia es:

$$S_X(f) = 2\int_0^\infty e^{-2\lambda\tau}\cos(2\pi f\tau)d\tau$$

$$= \frac{e^{-2\lambda\tau}}{4\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}(-4\lambda\cos(2\pi f\tau) + 4\pi f\sin(2\pi f\tau))\Big|_{\tau=0}^{\tau=\infty} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2 f^2}.$$

Como se ve en la figura 8, el comportamiento es el mismo que en el ejemplo 4.2 del módulo “Procesos estocásticos estacionarios”.

Figura 8. Gráficas de $R_X(\tau)$ (izquierda) y $S_X(f)$ (derecha)

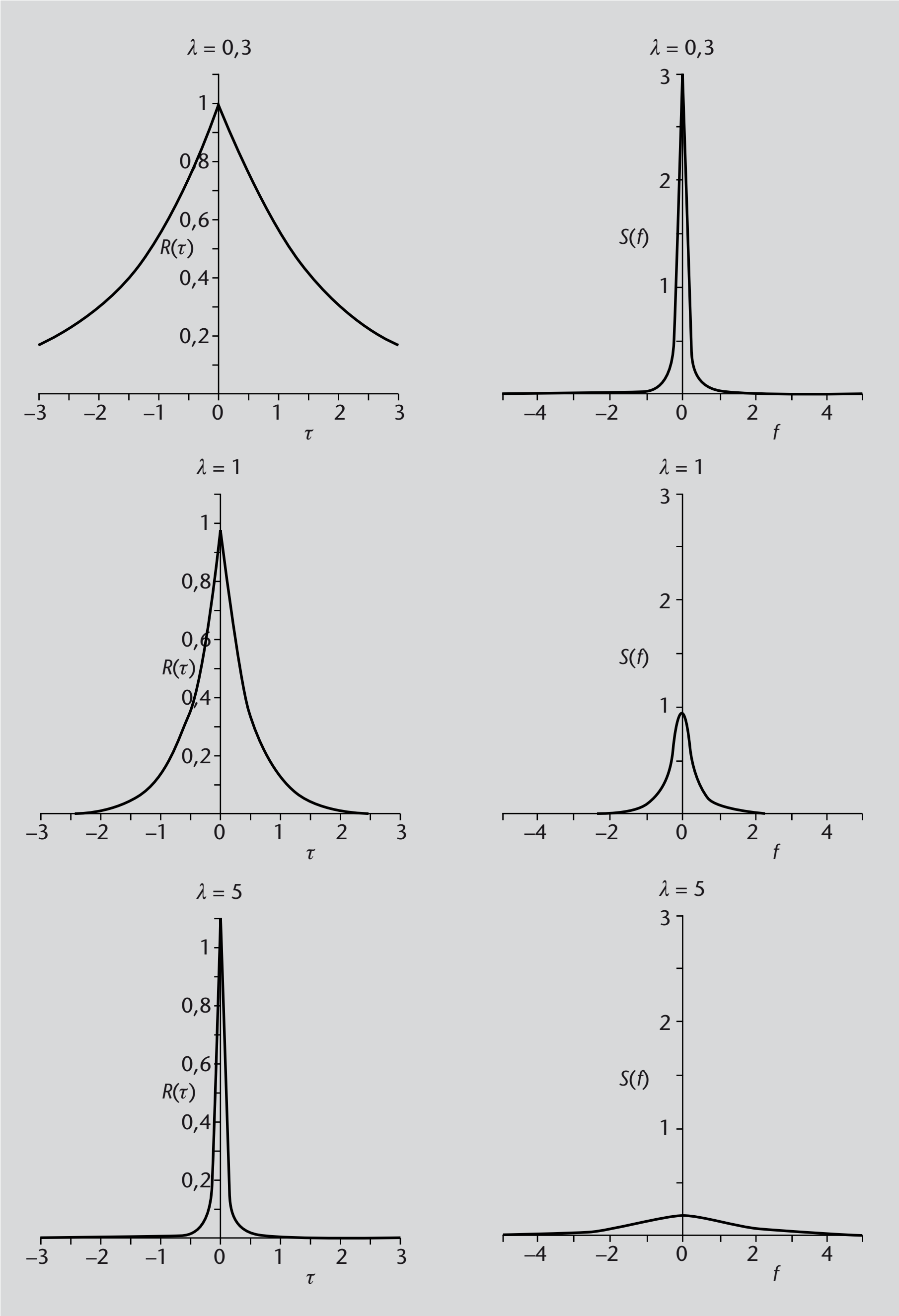

Figura 8

Representación de $R_X(\tau)$ (izquierda) y $S_X(f)$ (derecha). Recordad el ejemplo 4.2 del módulo "Procesos estocásticos estacionarios".