Introducción a los procesos estocásticos

PID_00253300

Josep Maria Aroca

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 2 horas

Universitat Oberta de Catalunya

Índice

Introducción

Hasta ahora, hemos visto qué son las variables aleatorias discretas y continuas. También hemos generado variables aleatorias a partir de una variable aleatoria original que hemos transformado mediante una función para obtener una nueva, de forma que la nueva variable se puede expresar como $Y = g(X)$. Finalmente, hemos estudiado el concepto de vector aleatorio, que nos permite tratar diferentes variables aleatorias al mismo tiempo. En todos estos casos, hemos visto cómo podemos asignar uno o más números a una determinada experiencia, y cómo este número puede variar cada vez que hacemos la experiencia.

Muchas veces, necesitamos tratar una variable aleatoria de manera más compleja. Imaginad, por ejemplo, que tenemos una aplicación que hace una predicción meteorológica. Para hacer esta predicción, necesitamos disponer de medidas de presión y de temperatura en diferentes puntos del espacio. Si dibujamos estas medidas de presión y temperatura, obtenemos una serie de gráficas para un día determinado. Si repetimos estas medidas para otro día, obtendremos unas gráficas diferentes. Y esto es precisamente lo que nos describe un proceso estocástico que, como veremos en este módulo, consiste en tener un espacio muestral formado de funciones, y cuando hagamos nuestra experiencia aleatoria, obtenemos una función determinada. Hasta ahora, el resultado de un experimento eran uno o más números. Ahora, el resultado del experimento será una función.

La aplicación de los procesos estocásticos es fundamental en las redes de comunicaciones, en el procesamiento de señales, en sistemas de control y otros campos de la ingeniería en los que necesitamos evaluar una medida o señal en el espacio o tiempo.

Veremos varios ejemplos de ello, y calcularemos alguna magnitud, preparando el camino para los parámetros que se definirán en módulos posteriores. Aun así, pondremos el énfasis en los aspectos conceptuales más que en cuestiones de cálculo.

Este módulo se estructura como se indica a continuación. En el apartado 1, introducimos el concepto de proceso estocástico o aleatorio. En los ejemplos que veremos, las funciones que forman el espacio muestral dependen del tiempo, es decir, la variable independiente es el tiempo, t. Tened presente, sin embargo, que podemos tener otras variables independientes, como el espacio, por ejemplo; en este caso, las funciones del espacio muestral dependerían de (x, y, z). En el apartado 2, veremos que según cómo sea la variable independiente de las funciones de nuestro espacio muestral, podemos diferenciar procesos a tiempo continuo y a tiempo discreto. Según los valores que tomen las funciones que forman el proceso estocástico veremos, en el apartado 3, que estos pueden ser de estado continuo o de estado discreto. Finalmente, en el apartado 4 veremos ejemplos de procesos estocásticos.

Objetivos

Los objetivos que tiene que lograr el estudiante, una vez trabajados los materiales didácticos de este módulo, son:

1. Entender qué es un proceso estocástico, y cuáles son sus realizaciones.

2. Familiarizarse con algunos ejemplos de procesos estocásticos.

3. Comprender la definición de los diferentes tipos de procesos estocásticos:

- A tiempo continuo.
- A tiempo discreto.
- De estado continuo.
- De estado discreto.

4. Aplicar los procesos estocásticos a problemas concretos en el campo de la ingeniería.

1. Definición de proceso estocástico

Empezamos este módulo con la definición de **proceso aleatorio** o **estocástico** mediante un ejemplo.

Ejemplo 1.1

Un inversor hace una operación en la bolsa que, en un día, puede dar dos resultados posibles. Las acciones pueden subir con probabilidad p, y en este caso tiene un beneficio α. De manera alternativa, las acciones pueden bajar con probabilidad $1 - p$ y la pérdida es β. El inversor hace esta operación cada día. Sus ganancias durante un día determinado constituyen una variable aleatoria, pero al inversor lo que le interesa es el conjunto de resultados a lo largo del tiempo.

Lo primero que podemos analizar es la evolución temporal de las subidas y bajadas. Los dos posibles resultados en un día cualquiera los representamos como A (acontecimiento «subida») y B (acontecimiento «bajada»). Denominamos R_1 el resultado del primer día, R_2 el resultado del segundo día, etc. Así, la evolución dinámica de las acciones es representada por la secuencia $\mathcal{R} = R_1R_2R_3\cdots$, en la que cada R_i puede valer A o B.

Otra magnitud de interés es la ganancia acumulada hasta el día i, X_i. La evolución económica de la operación hecha queda representada por la secuencia:

$$\mathcal{X} = [X_1, X_2, X_3, \cdots].$$

Para fijar ideas, tomamos $\alpha = 3$ $\beta = 2y$. Si los 15 primeros días tenemos

$$\mathcal{R} = AABABBBAABABABA,$$

entonces

$$\mathcal{X} = [3, 6, 4, 7, 5, 3, 1, 4, 7, 5, 8, 6, 9, 7, 10].$$

Esta evolución es una función en la cual la variable independiente es el tiempo i y la variable dependiente es X, y X_i es la ganancia en el instante i. La gráfica de la figura 1 muestra esta evolución.

Muchas cuestiones que nos podemos plantear están relacionadas con la evolución de estas variables aleatorias a lo largo del tiempo. Por ejemplo:

- Las ganancias, ¿tienden a aumentar o a disminuir?
- Partiendo de un capital dado, ¿cuál es el tiempo medio hasta que este se ha duplicado?
- Sabiendo que el día i $X_i = C$, ¿cuál es la probabilidad de que el día $j > i$ X_j tome un cierto valor o esté en un intervalo determinado de valores?

En este ejemplo, la experiencia aleatoria consiste en hacer la operación bursátil cada día y lo que obtenemos es la evolución temporal de las ganancias diarias. Si hacemos la experiencia en periodos diferentes, obtenemos gráficas distintas, y esto es un ejemplo de lo que entendemos por proceso estocástico.

Figura 1. Evolución de la ganancia del inversor

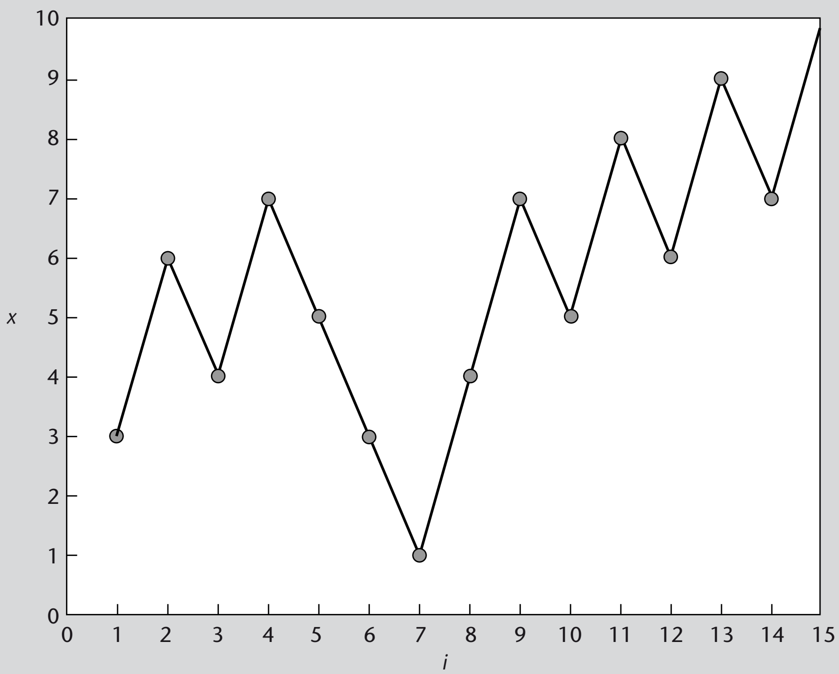


Figura 1

En la figura, se representa una posible evolución de las ganancias de inversor para un periodo de 15 días. Observad que esta gráfica es una realización concreta del proceso aleatorio.

Definición 1.1. Un **proceso estocástico**, $X(t)$, es la asignación de una función $x(t)$ a cada resultado de un experimento aleatorio. Para cada realización del experimento, obtendremos una función $x(t)$ diferente.

Observad que el **proceso estocástico** $X(t)$ es un conjunto de funciones posibles y la realización de un experimento nos asigna no un número concreto, como habíamos visto en módulos anteriores, sino una función $x(t)$.

Otras denominaciones de proceso estocástico

Un **proceso estocástico** también se denomina **proceso aleatorio** o **función aleatoria**.

De manera general, fijaremos algunas características de estas funciones. Consideraremos que $X(t)$ toma valores reales e interpretamos la variable independiente t como tiempo. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que no siempre se analiza la evolución de X en el tiempo. La variable o variables independientes de nuestro proceso estocástico las definiremos según la aplicación concreta. Veamos algunos ejemplos de ello:

- En el estudio de la distribución de materia en el universo, serán necesarias funciones $X(x, y, z)$ que dependen de la posición en el espacio tridimensional.

- Un sistema de procesamiento de imagen requiere una descripción estadística de las posibles imágenes. Por lo tanto, un proceso $X(x, y)$ en el que (x, y) son coordenadas rectangulares sobre la imagen.

- Un sistema de análisis meteorológico puede utilizar $X(t,z)$, la presión a altura z en el instante t, etc.

Como acabamos de ver en la definición 1.1, dado un proceso estocástico, cada vez que se hace el experimento aleatorio se obtiene una función $x(t)$ diferente. Algunas veces, nos querremos referir a las propiedades de algunas de estas funciones.

Observad la figura 2. El inversor del ejemplo que hemos visto antes toma muestras de la evolución de la bolsa durante 8 días, y repite este experimento de tomar 8 muestras 4 veces. De este modo, obtiene 4 gráficas o funciones como resultado.

Figura 2. Cuatro posibles resultados en la evolución de la ganancia (sobre un intervalo de 8 días)

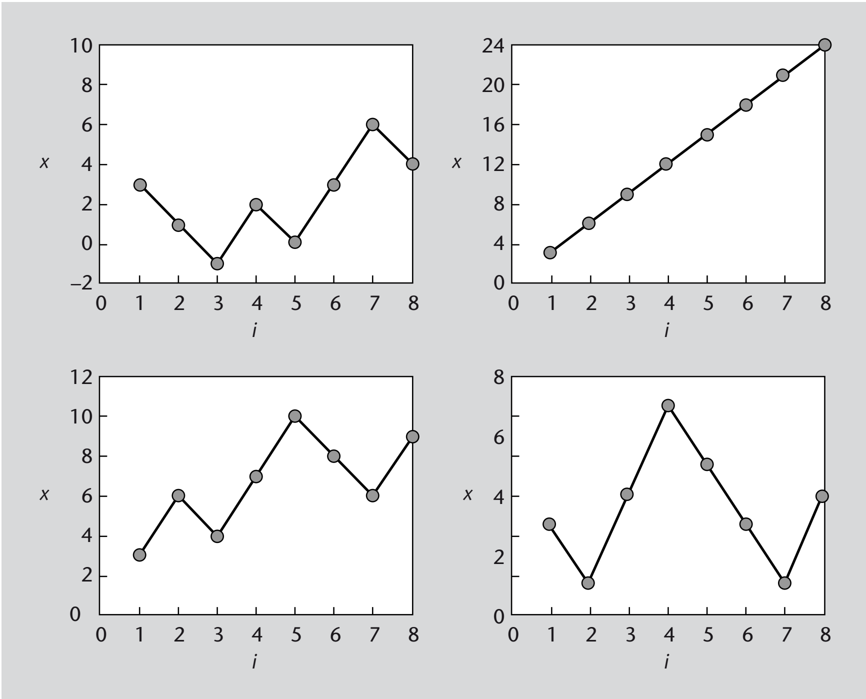


Figura 2

En este ejemplo, partimos de un mismo proceso estocástico $X(t)$, que consiste en evaluar la evolución de la bolsa. Observad, sin embargo, que cuatro realizaciones distintas del proceso nos dan cuatro funciones $x(t)$ diferentes.

Cada una de estas funciones es una **realización** del proceso. Estas son funciones $x(t)$ que tenemos en la práctica.

Ejemplo 1.2

Veamos otro ejemplo de proceso estocástico. Suponed que lanzamos una moneda al aire. Si obtenemos cara, el proceso estocástico asigna la función $x_{\text{cara}} = \sin(\omega_0 t)$. Si sale cruz, el proceso estocástico asigna la función $x_{\text{cruz}} = \sin(2\omega_0 t)$, en la que ω_0 es una frecuencia fijada. En este caso, nuestro proceso estocástico se compone de dos posibles funciones, tal y como podéis ver en la figura 3.

Imaginad que ahora, en vez de tirar una moneda al aire, tenemos una secuencia de 5 bits aleatorios. Al recibir un 0, asignamos la función $x_0 = \sin(\omega_0 t)$ y al recibir un 1, asignamos la función $x_1 = \sin(2\omega_0 t)$. Si, por ejemplo, recibimos la secuencia de bits 10101, la función resultante es la que podéis ver en la figura 4. Observad cómo los 0 tienen frecuencia ω_0 y los 1 tienen frecuencia $2\omega_0$ (la señal varía más rápidamente). Esta función que hemos obtenido es una de las posibles funciones del proceso estocástico, es decir, es una **realización** del proceso. Si ahora repetimos el experimento con otra secuencia de bits aleatoria, obtendremos otra gráfica diferente.

Así es como funciona la modulación FSK (*frequency shift keying*). Este tipo de modulación toma cada bit (o conjunto de bits) y les asigna una frecuencia determinada.

Figura 3. Asignación de una función $x(t)$ según el experimento de lanzar una moneda al aire.

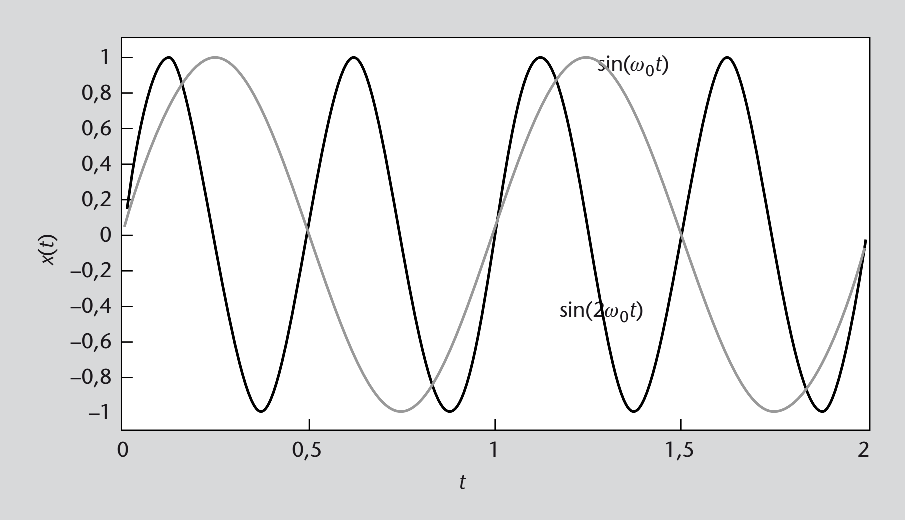


Figura 3

En este ejemplo, las dos funciones que forman el proceso estocástico son $x_{\text{cara}} = \sin(\omega_0 t)$ y $x_{\text{cruz}} = \sin(2\omega_0 t)$. Cada vez que lanzamos la moneda, obtenemos una u otra.

Figura 4. Ejemplo de proceso estocástico aplicado a la modulación FSK

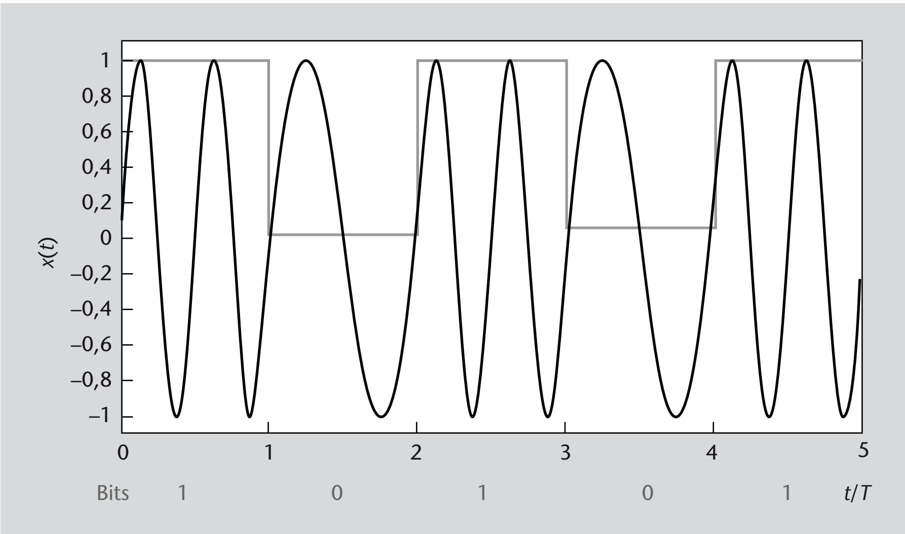


Figura 4

En este ejemplo, asignamos la frecuencia ω_0 al bit 0 y la frecuencia $2\omega_0$ al bit 1. La señal transmitida en este caso es la secuencia 10101. El parámetro T del gráfico es la duración de cada bit. Si la secuencia de bits es distinta, la señal transmitida también lo es.

Definiremos, a continuación, qué entendemos por **realización** de un proceso estocástico.

Definició 1.2. Las funciones que se obtienen al hacer el experimento aleatorio se denominan **realizaciones** del proceso estocástico.

Así, el término **realización** hace referencia a cada una de las funciones que se obtienen como resultado de un experimento aleatorio, mientras que el término **proceso estocástico** hace referencia al conjunto total de posibles funciones resultantes. La figura 5 muestra varias realizaciones de un mismo proceso.

Figura 5. Cuatro realizaciones de un proceso $X(t)$

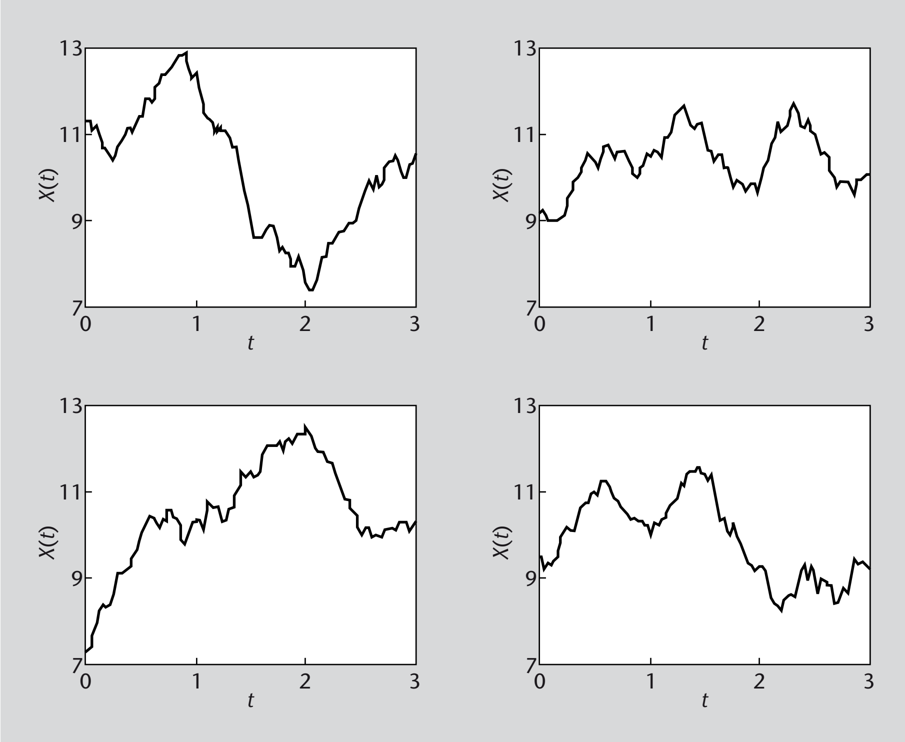


Figura 5

Un proceso estocástico es el conjunto de todas las funciones posibles que podemos obtener al hacer un experimento. Una realización del proceso estocástico es la función que obtenemos cuando hacemos el experimento concreto.

Desde el punto de vista matemático, el tratamiento de los procesos estocásticos presenta algunas dificultades. En el caso de variables aleatorias, como hemos visto en los módulos anteriores, podemos hacer medias estadísticas porque disponemos de los instrumentos matemáticos de la suma (para variables aleatorias discretas) o la integración (para variables aleatorias continuas). Sin embargo, ahora, proseguir con esta analogía nos obligaría a hacer algún tipo de integración sobre el conjunto de todas las funciones posibles. Esto implicaría tener que describir este conjunto de funciones posibles y requeriría construir una integración sobre este conjunto, cosa que el cálculo ordinario no nos permite.

A pesar de que estas dificultades se pueden superar en algunos casos, el procedimiento habitual es no abandonar el caso de los vectores aleatorios y utilizar el hecho esencial siguiente.

Si fijamos un valor de t, $X(t)$ es una variable aleatoria unidimensional.

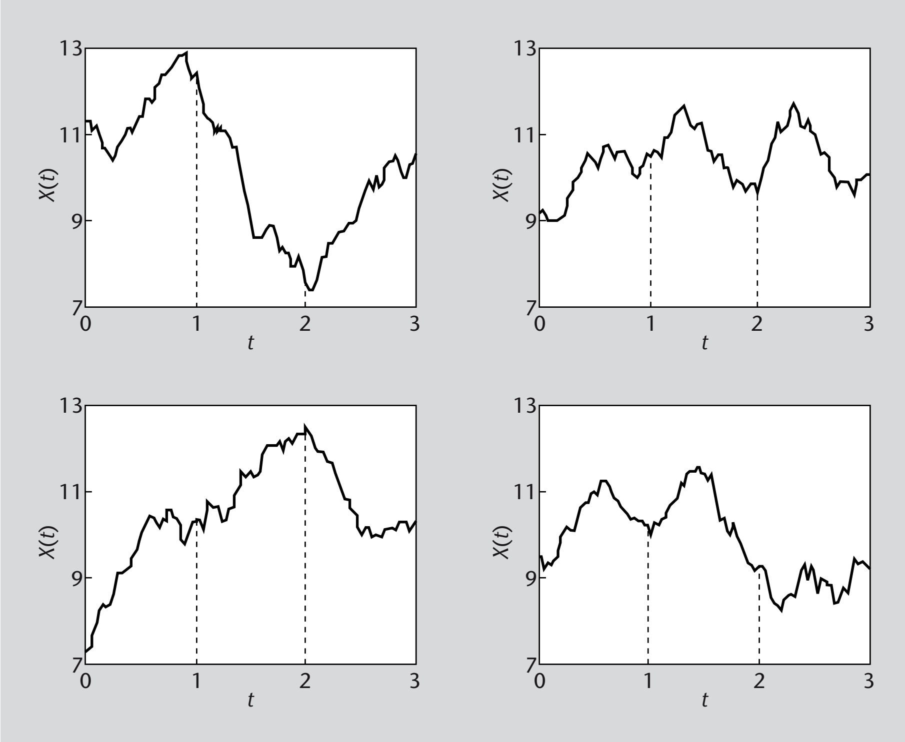
Por ejemplo, en el proceso representado en la figura 5, podemos fijar la atención en el valor $t = 1$. Cada vez que hacemos la experiencia aleatoria se obtiene una función, pero ahora nos fijamos en lo que vale esta función en $t = 1$. Se trata del valor de $X(1)$, que para cada realización es un número. Este valor es la altura de la función sobre $t = 1$. Como se ve en la figura 6, cada realización nos da un valor diferente para esta altura. $X(1)$ es, pues, una variable aleatoria ordinaria. Naturalmente, podemos hacer este análisis para un instante de tiempo cualquiera. En la figura, se muestran también las alturas sobre $t = 2$. Ahora $X(2)$ es otra variable aleatoria.

De este modo, pensaremos en el proceso estocástico $X(t)$ como en una variable aleatoria que depende de un índice t.

Observación

Para poder tratar los procesos estocásticos de una manera relativamente sencilla, fijaremos ciertos valores de la variables independiente t del proceso y trataremos los correspondientes valores $X(t)$ como variables aleatorias unidimensionales.

Figura 6. Las alturas correspondientes a $t = 1$ y $t = 2$



Observación

Cuando fijamos un valor de la variables independiente, como por ejemplo $t = 1$, las distintas realizaciones del proceso nos dan como resultado una variable aleatoria $X(1)$. Podemos tratar $X(1)$ como una variable aleatoria unidimensional. Lo mismo sucede para cualquier otro valor de t.

Figura 6

Esta figura muestra cuatro realizaciones de un proceso estocástico. Aquí tomamos como variables aleatorias unidimensionales $X(1)$ y $X(2)$.

Figura 7. Cuatro realizaciones y los valores que van tomando $X(1)$ y $X(2)$

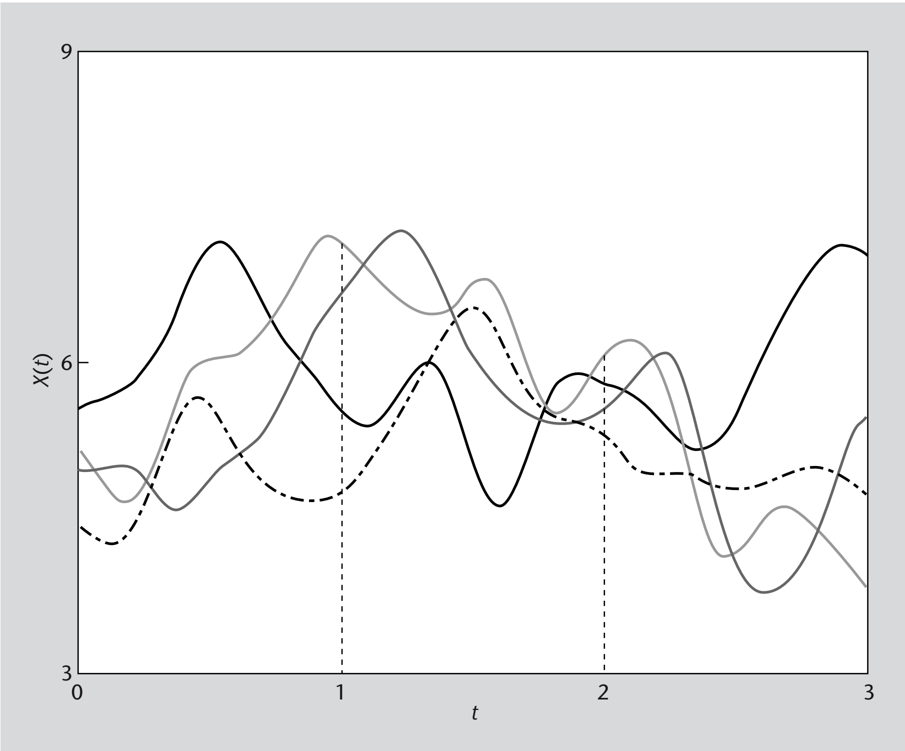


Figura 7

Como en la figura 6, pero ahora sobre un mismo gráfico, podemos ver cuatro realizaciones de un proceso estocástico y los valores que van tomando las variables aleatorias unidimensionales $X(1)$ y $X(2)$.

Una vez revisada la definición de proceso estocástico, a continuación veremos que podemos clasificar los procesos estocásticos en cuatro tipos básicos.

2. Procesos a tiempo continuo y a tiempo discreto

En el apartado anterior, hemos visto la definición de proceso estocástico. Ahora veremos cómo podemos clasificar los procesos estocásticos dependiendo de si la variable independiente t es un parámetro continuo o discreto.

En el ejemplo del inversor, el proceso lo constituye la sucesión de resultados en días consecutivos. Así, en este caso, el tiempo se mide en días y se representa con un parámetro discreto i. Las gráficas de estos procesos consisten en una sucesión de puntos aunque, normalmente, se unen con líneas rectas, tal y como hemos hecho en la figura 1. Observad que, en este ejemplo, la variable independiente solo toma valores enteros (día 1, día 2, etc.).

Variables independientes de los procesos estocásticos

En todos los ejemplos que estamos viendo, estamos considerando procesos estocásticos que dependen de una sola variable independiente, el tiempo. Recordad, sin embargo, que podemos tener procesos estocásticos que dependan de distintas variables independientes, como por ejemplo el espacio (x, y, z).

Definición 2.1. Un **proceso estocástico a tiempo discreto** es aquel en el que la variable t toma un conjunto finito o infinito numerable de valores reales. Por ejemplo, $t \in \mathbb{Z}$.

En otros muchos casos, sin embargo, la variable independiente puede variar de manera continua sobre los reales.

Definición 2.2. Un **proceso estocástico a tiempo continuo** es aquel en el que la variable t varía sobre todo un intervalo real. Por ejemplo, $t \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \infty)$ o $t \in [a, b]$.

Veamos un ejemplo para clarificar conceptos.

Ejemplo 2.1

Una central eléctrica suministra energía a una población. La demanda de electricidad está sometida a fluctuaciones, puesto que es la suma de las demandas de muchos consumidores pequeños. También hay factores como la hora (se produce más consumo por la tarde, cuando oscurece) y las variaciones del tiempo atmosférico (si viene un golpe de frío, se puede disparar el consumo por el uso de la calefacción). Si representamos el tiempo a lo largo de un día por la variable t ($0 \leq t < 24$, en horas), la demanda constituye un proceso estocástico $D(t)$.

En este caso, es necesario considerar t como una variable continua, es decir, que toma cualquier valor real, puesto que la central tiene que poder responder de manera rápida a las variaciones que se van produciendo en la demanda.

Figura 8. Evolución de la demanda energética a lo largo de un día

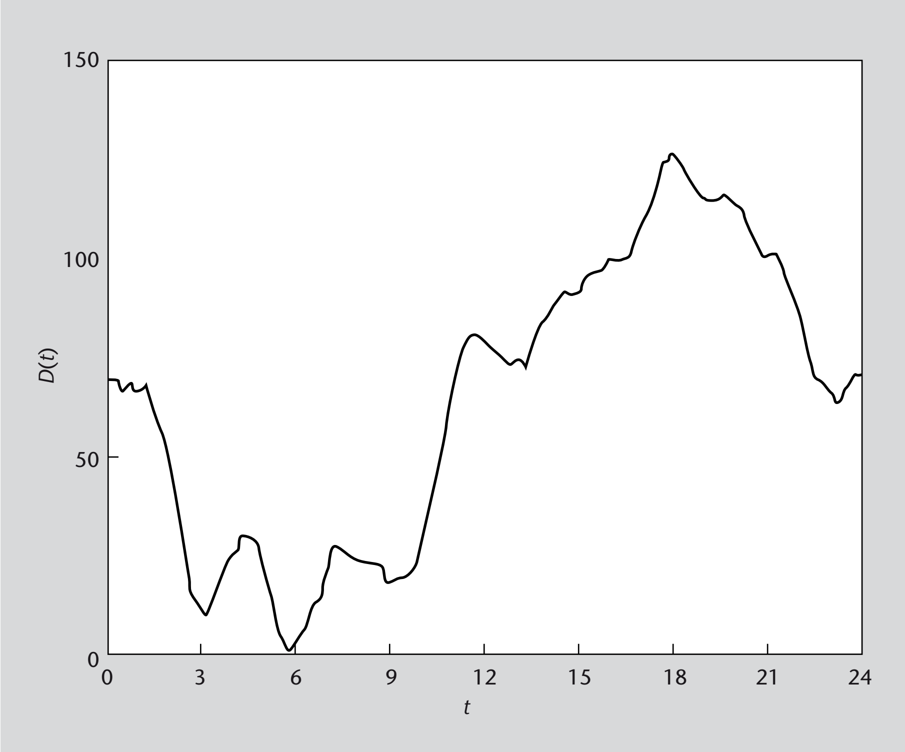


Figura 8

Ejemplo de una realización de un proceso estocástico a **tiempo continuo**, puesto que la variable t puede tomar cualquier valor real.

El caso de tiempo discreto es más sencillo de tratar, puesto que nos remite más directamente a los vectores aleatorios. En efecto, si t toma solo los valores $t_1, t_2, \cdots$, la función resultante queda especificada por $X(t_1), X(t_2), \cdots$ y esto constituye un conjunto de variables aleatorias. ¿Dónde está la diferencia con los vectores aleatorios?

- Por un lado, ahora tenemos una secuencia de infinitas variables aleatorias, de forma que no las podemos tratar todas conjuntamente, sino en subconjuntos finitos.

- Por otro lado, en un vector aleatorio el índice que numera las variables es puramente una etiqueta sin un significado especial, mientras que en el proceso estocástico, este índice tiene el significado de posición temporal y posee un papel más dinámico. Por ejemplo, podemos esperar una correlación más fuerte entre $X(t_1)$ y $X(t_2)$ que entre $X(t_1)$ y $X(t_{50})$.

Procesos estocásticos a tiempo discreto y vectores aleatorios

Podemos pensar en un proceso aleatorio en tiempo discreto como en un vector aleatorio. Cuidado, sin embargo, con algunas diferencias conceptuales importantes.

Los procesos a tiempo continuo constituyen la clase más general, y nuestra descripción general se encaminará a este tipo. Podemos conectar los dos tipos si pensamos en procesos a tiempo discreto que aproximen procesos a tiempo continuo (por medio de un muestreo, quizá) o en procesos a tiempo continuo como paso al límite de procesos a tiempo discreto.

Véase también

En el apartado 3 de este módulo, veremos que los procesos estocásticos también se pueden diferenciar en función de si los valores que tomamos son discretos o continuos.

3. Procesos de estado continuo y de estado discreto

En este apartado del módulo, veremos otra manera de clasificar los procesos estocásticos. Esta clasificación corresponde a los valores que puede tomar $X(t)$. Dado que con t fijado $X(t)$ es una variable aleatoria, el proceso se tendrá que tratar de manera diferente según esta variable sea discreta o continua. Hablaremos de procesos de estado discreto o de estado continuo para referirnos a estos casos.

Definición 3.1. Un **proceso estocástico de estado discreto** es aquel en el que la variable aleatoria $X(t)$ a tiempo fijado es una variable discreta.

Ejemplo 3.1

Un servidor de internet va recibiendo visitas que podemos considerar que se producen en instantes aleatorios. Consideramos $0 \leq t \leq 24$ (expresado en horas) y definimos el proceso estocástico $X(t)$ como un contador de visitas ($X(0) = 0$ y se incrementa una unidad cada vez que hay una visita). Claramente, para t arbitrario fijado, $X(t)$ solo puede valer $0, 1, 2, 3, \ldots$ De este modo, tenemos un proceso de estado discreto (y a tiempo continuo, puesto que el contador está definido en cualquier instante).

Definición 3.2. Un **proceso estocástico de estado continuo** es aquel en el que la variable aleatoria $X(t)$ a tiempo fijado es una variable continua.

Ejemplo 3.2

Medimos de manera precisa el nivel de ruido $X(t)$ en un circuito electrónico en función del tiempo t. El proceso es de estado continuo, puesto que esta intensidad es un número real arbitrario (dentro de un cierto intervalo). Tal y como lo planteamos, el proceso también está a tiempo continuo, pero lo podríamos hacer a tiempo discreto si llevásemos a cabo las medidas separadas por un cierto intervalo de tiempo; por ejemplo, cada 0,01 segundos.

Para resumir, podemos clasificar los procesos en dos tipos, en función de los valores que pueden tomar: **proceso estocástico de estado continuo** y **proceso estocástico de estado discreto.**

4. Ejemplos de procesos estocásticos

En principio, en un proceso aleatorio no debe haber necesariamente relaciones de dependencia entre las variables $X(t)$ a tiempos diferentes. Esto da lugar a funciones de apariencia irregular y comportamiento complicado (desde la perspectiva del análisis matemático). Por otro lado, podemos construir procesos, de manera un tanto artificial, tomando funciones ordinarias e introduciendo parámetros aleatorios. Estos últimos ejemplos, además de su utilidad pedagógica porque son fácilmente manipulables, también se pueden presentar en la realidad.

En este apartado, y ya para finalizar este módulo de introducción a los procesos estocásticos, veremos desde procesos en los que definimos algunas variables aleatorias, y para los cuales las realizaciones tienen una forma similar, hasta procesos totalmente imprevisibles y sin ninguna correlación entre instantes distintos.

4.1. Procesos representables explícitamente en términos de variables aleatorias

En este subapartado, vemos dos ejemplos de procesos estocásticos que se pueden definir por una función determinista en la que alguno de sus parámetros es una variable aleatoria. Veámoslos a continuación.

Funciones deterministas y no deterministas

En una función determinista, conocemos todos los valores que toma la función. Si, por ejemplo, tenemos la función $y(t) = A\sin(\omega t)$, podemos saber qué valores tiene la función para cualquier valor de t si conocemos los parámetros A y ω. Si alguno de estos parámetros es una variable aleatoria, la función es no determinista.

Ejemplo 4.1

Disparamos un proyectil verticalmente con velocidad inicial v_0. Sabemos, por mecánica newtoniana, que su posición (altura) en función del tiempo es determinada por $h(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$, donde $g = 10ms^{-2}$ es la aceleración de la gravedad. Suponemos que el sistema que impulsa el proyectil está sometido a fluctuaciones, de forma que v_0 no toma un valor constante y lo podemos considerar una variable aleatoria. Entonces, cada vez que disparamos el proyectil, el movimiento $h(t)$ es diferente, puesto que v_0 varía. Por lo tanto, tenemos que considerar $h(t)$ como un proceso estocástico. En la figura 9, se muestran tres realizaciones de este proceso.

En este ejemplo, todo el carácter aleatorio de la función $h(t)$ se debe a un único parámetro v_0, lo que simplifica el estudio de este proceso.

A continuación, damos una formulación general de este tipo de procesos.

Por simplicidad, utilizaremos un máximo de dos parámetros aleatorios, a pesar de que la extensión a una variable n-dimensional es inmediata. Son procesos que se pueden representar en la forma siguiente:

Véase también

Los **vectores aleatorios** se estudian en el módulo «Vectores aleatorios».

$$X(t) = \Phi(t, A, B), \tag{1}$$

donde Φ es una función fijada de tres variables y (A, B) es un vector aleatorio bidimensional. Al hacer el experimento aleatorio, A y B quedan determinadas y pasan a ser parámetros numéricos que fijan la forma de $X(t)$.

Figura 9. Evolución de la altura en tres lanzamientos del proyectil

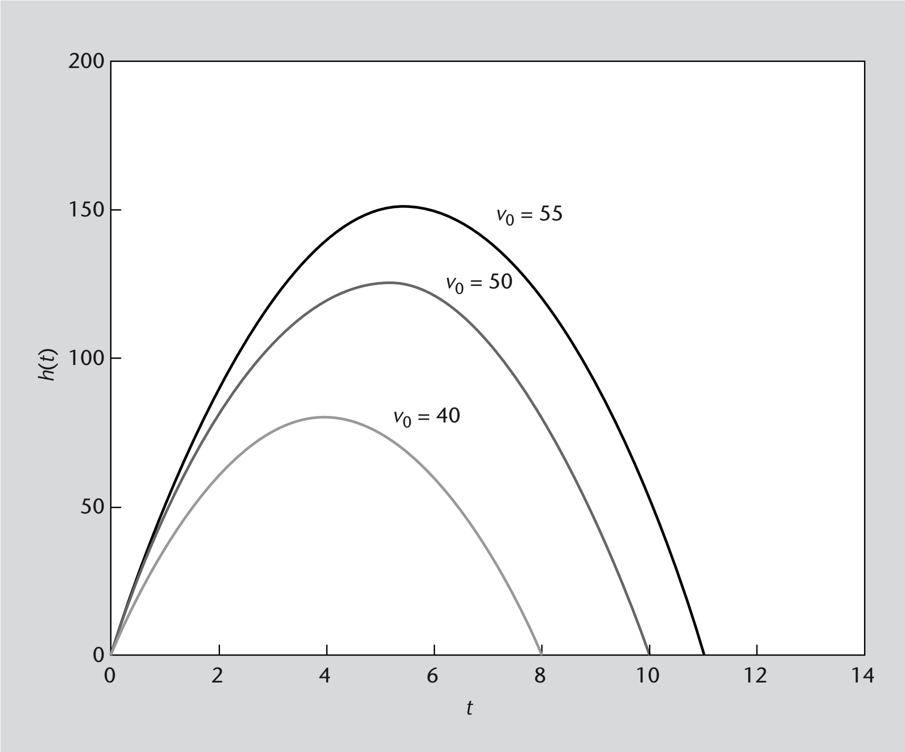


Figura 9

Este proceso estocástico consiste en una función determinista en la que el parámetro v_0 es una variable aleatoria. Observad que las tres realizaciones del proceso tienen una forma similar.

Veamos otro ejemplo sobre oscilaciones aleatorias de todo lo que hemos visto en este subapartado.

Ejemplo 4.2

Imaginad que el voltaje que aplicamos a un circuito es un proceso de la forma $X(t) = V\cos(t - \varphi)$, en el que V y φ constituyen un vector aleatorio bidimensional. Por lo tanto, estamos considerando que la amplitud y la fase de este voltaje están sometidos a fluctuaciones estadísticas. Esto refleja el hecho de que este circuito recibe voltajes de una colectividad de usuarios, o está producido por un aparato con tolerancias amplias de fabricación, o hay un efecto externo (ruido, por ejemplo) que lo afecta, etc.

Para fijar más la situación, suponemos que V es una variable exponencial de valor medio 1, que φ es una variable uniforme en $[0, 2\pi]$ y que son independientes.

Si fijamos un instante dado $t = t_0$, tal y como hemos visto en el apartado 1 de este módulo, resulta que $X(t_0)$ es una variable unidimensional que es función de dos variables aleatorias. Esta es una situación que sabemos tratar. Por ejemplo, para $t = 0$ tenemos la variable $X(0)$. Vemos que podemos calcular su esperanza:

$$\mathrm{E}(X(0)) = \mathrm{E}(V\cos\varphi) = \mathrm{E}(V)\,\mathrm{E}(\cos\varphi),$$

puesto que V y $\cos\varphi$ son variables independientes. El primer factor vale, tal y como dice el enunciado, $\mathrm{E}(V) = 1$. El segundo lo calculamos con el teorema de la esperanza:

$$\mathrm{E}(\cos\varphi) = \int_0^{2\pi} \cos\varphi \frac{1}{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\left[\sin\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(\sin 2\pi - \sin 0) = 0.$$

Observación

En el ejemplo 4.2, el proceso estocástico depende del tiempo y del vector aleatorio bidimensional (V, φ). Es decir, $X(t) = \Phi(t, V, \varphi)$.

Variable exponencial

Recordemos que una variable aleatoria exponencial de parámetro λ se representa $\mathrm{Exp}(\lambda)$ y tiene valor medio $m = \frac{1}{\lambda}$. A veces, nos referimos a esta variable como exponencial de valor medio m.

Teorema de la esperanza

El teorema de la esperanza dice que, dada una variable aleatoria X, el valor medio de una función de esta variable $g(X)$ vale $\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$.

Así, llegamos a la conclusión: $\mathrm{E}(X(0)) = 0$.

Este resultado se puede entender si tenemos en cuenta que el proceso $X(t)$ consiste en una oscilación con una fase que es aleatoria y toma valores sobre todo un periodo con densidad uniforme. Por lo tanto, contribuyen valores positivos y negativos con el mismo peso, y el valor medio es nulo.

Para completar el ejemplo, vemos que podemos expresar este proceso a partir de otras variables aleatorias, haciendo un cambio adecuado. Utilizando la fórmula

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{2}$$

resulta

$$X(t) = A\cos t + B\sin t, \tag{3}$$

donde $A = V\cos\varphi$ y $B = V\sin\varphi$. Entonces, (A, B) es un vector aleatorio que se obtiene del vector (V, φ) con un cambio de variables. Algunos aspectos de este proceso se estudian mejor con esta representación.

4.2. Procesos con infinitos grados de libertad aleatorios

Muchos procesos no se pueden expresar a partir de un número finito de parámetros aleatorios, como sería el caso de los procesos que hemos visto en el subapartado anterior. Esto puede representar que no tengamos una expresión explícita de la función $X(t)$. Aun así, en muchas aplicaciones lo que importa son medias estadísticas que en los procesos más habituales son fáciles de calcular. A veces podemos expresar el proceso en términos de un conjunto numerable de variables aleatorias, cosa que nos da un cierto carácter explícito y la posibilidad de hacer cálculos de manera análoga al ejemplo 4.2 del subapartado anterior.

Ejemplo 4.3

Definimos un proceso en el que las variables $X(t)$ en instantes diferentes son independientes. Además, para todo t, la variable $X(t)$ es normal con $m = 0$ y $\sigma = 1$. El resultado es un proceso en el que las realizaciones son totalmente irregulares.

Figura 10. Realización del proceso $X(t)$

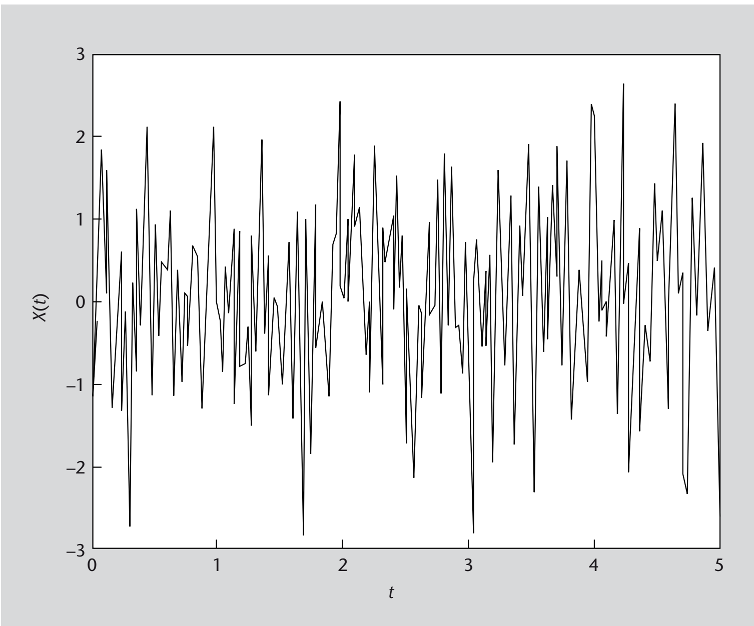


Figura 10

El ruido blanco es un ejemplo de proceso en el que no podemos prever los valores del proceso en un instante a partir de los valores en instantes distintos. Lo que sí podemos hacer, sin embargo, es caracterizar este proceso con los parámetros de media, m, y desviación estándar, σ.

Ejemplo 4.4

El movimiento browniano tiene importancia histórica y por sus aplicaciones. En 1827, el botánico Robert Brown observó en el microscopio que las partículas de polen en suspensión en agua en reposo manifestaban un movimiento muy irregular que parecía inexplicable. Estas trayectorias constituyen un proceso estocástico, en este caso en $\mathbb{R}^3$, ya que la trayectoria es $(X(t), Y(t), Z(t))$.

El ejemplo es particularmente relevante, ya que la explicación de este movimiento son las fluctuaciones en los choques que las moléculas de agua en agitación técnica hacen contra la partícula. De este modo, la descripción del fenómeno permite verificar de manera indirecta los modelos moleculares y de mecánica estadística para describir la materia. Al mismo tiempo, la descripción matemática de este proceso es útil como modelo de otros fenómenos y es aplicable en campos como la ingeniería.

Figura 11. Simulación del movimiento browniano bidimensional

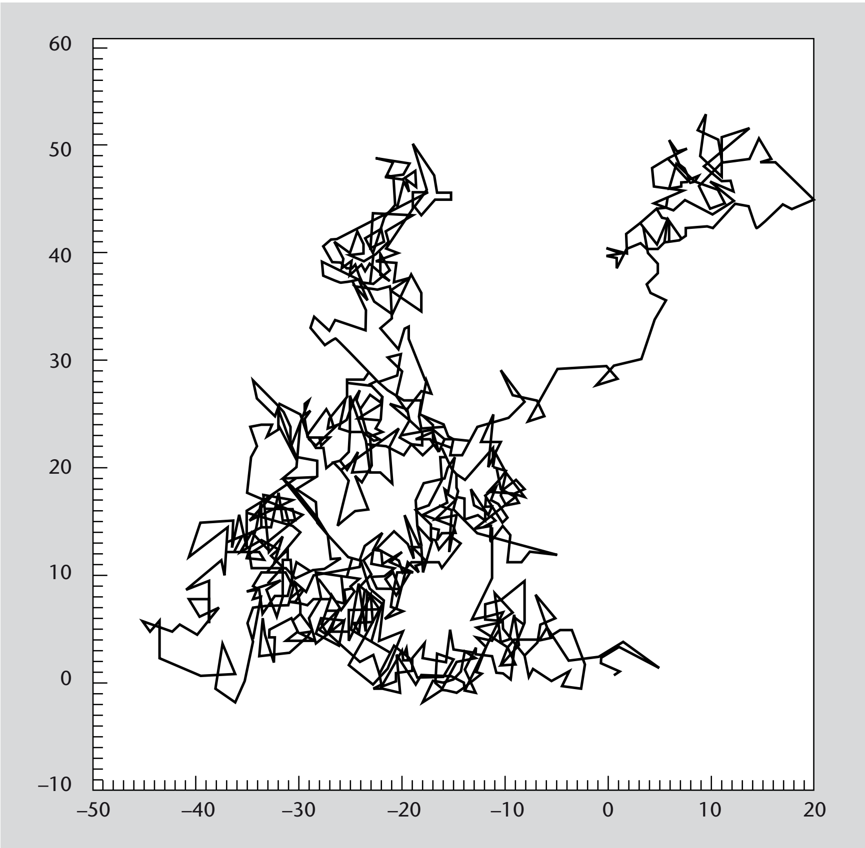


Figura 11

El movimiento browniano es un movimiento bastante irregular e imprevisible, pero es continuo y hay correlaciones. La descripción matemática de este fenómeno fue elaborada por Albert Einstein en el año 1905.

A continuación, vemos otro ejemplo sobre el paseo aleatorio basado en el movimiento browniano que acabamos de ver.

Ejemplo 4.5

Desarrollamos con un cierto detalle un ejemplo similar al movimiento browniano. Una partícula se mueve en una dimensión. $X(t)$ representa su posición en el instante t ($t \geq 0$). Partimos de $X(0) = x_0$. La partícula se mueve con una velocidad constante que cambia de manera brusca en los instantes $t = 1, 2, 3, \ldots$ Esto lo representamos diciendo que el desplazamiento de $X(n-1)$ a $X(n)$ es determinado por la variable aleatoria Z_n. Las variables $Z_1, Z_2, \ldots$ son independientes y son todas del mismo tipo, como por ejemplo, $\mathrm{N}(m, \sigma)$.

El proceso consiste en una línea poligonal (tramos de recta pegados con continuidad en los valores enteros de t). Para $n \in \mathbb{N}$, $X(n) = X(n-1) + Z_n$. Así, para t entero tenemos:

$$X(n) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i. \tag{4}$$

Figura 12. Tres realizaciones del proceso $X(t)$ con $x_0 = 0,\ m = 1,\ \sigma = 1{,}5$

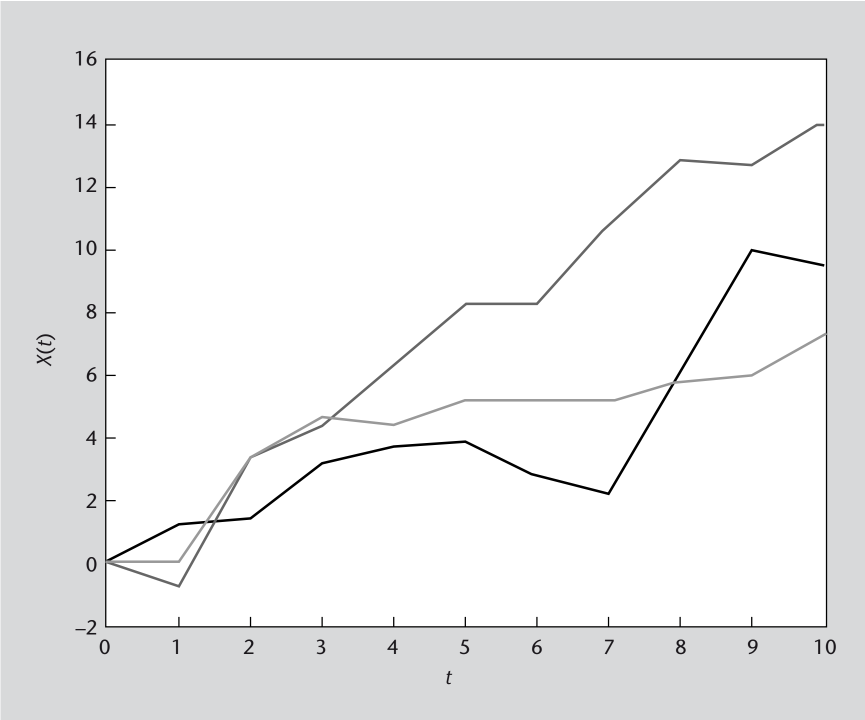


Figura 12

Ejemplo de tres realizaciones distintas del proceso paseo aleatorio.

Para expresar el proceso para t arbitrario, ponemos $t = [t] + d(t)$, donde $[t]$ es la parte entera de t y $d(t) = t - [t]$, su parte decimal. Dado que los puntos $([t], X([t]))$, $([t] + 1, X([t] + 1))$ se unen con un segmento de línea recta donde se encuentra el punto $(t, X(t))$, tenemos la proporcionalidad:

$$\frac{X(t) - X([t])}{t - [t]} = \frac{X([t] + 1) - X([t])}{([t] + 1) - [t]},$$

es decir:

$$\frac{X(t) - X([t])}{d(t)} = Z_{[t]+1},$$

de donde $X(t) = X([t]) + d(t)Z_{[t]+1}$. Entonces podemos escribir $X(t)$ explícitamente, para cualquier $t \geq 0$, como:

$$X(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} Z_i + d(t)Z_{[t]+1}. \tag{5}$$

Por ejemplo, para expresar $X(2,3)$ tenemos que $X(2,3) = X(2) + 0,3Z_3$, y $X(2) = X(1) + Z_2 = (X(0) + Z_1) + Z_2 = x_0 + Z_1 + Z_2$.

Hemos llegado a una expresión explícita del proceso, en términos de las variables aleatorias Z_n. Ahora nos podemos plantear el estudio de alguna propiedad de este proceso. Dado que las funciones expresadas en la ecuación (5) son aleatorias, aparecen dos tipos de cuestiones que es natural plantearse. Una es cuál es la probabilidad de que a la función $X(t)$ le pase algo. Otra es cómo se comporta $X(t)$ de media. Este segundo tipo suele tener más interés. A modo de ejemplo, dado que la posición en un instante cualquiera es aleatoria, podemos calcular su valor medio. Dado que esto lo podemos hacer para todo instante t, lo que obtendremos será un tipo de trayectoria media.

Calculamos, pues, el valor medio de la variable $X(t)$ para cualquier t fijado:

$$\mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} Z_i + d(t)Z_{[t]+1}\right) = x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} \mathrm{E}(Z_i) + d(t)\,\mathrm{E}(Z_{[t]+1}) =$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} m + d(t)m = x_0 + [t]m + d(t)m = x_0 + mt.$$

Así, hemos demostrado:

$$\mathrm{E}(X(t)) = x_0 + mt. \tag{6}$$

Podemos interpretar este resultado diciendo que, de media, se desplaza a velocidad constante m.

La gráfica de la figura 13 representa tres realizaciones y la recta media, $x_0 + mt$.

Figura 13. La recta $x_0 + mt$ (línea punteada) junto con tres realizaciones

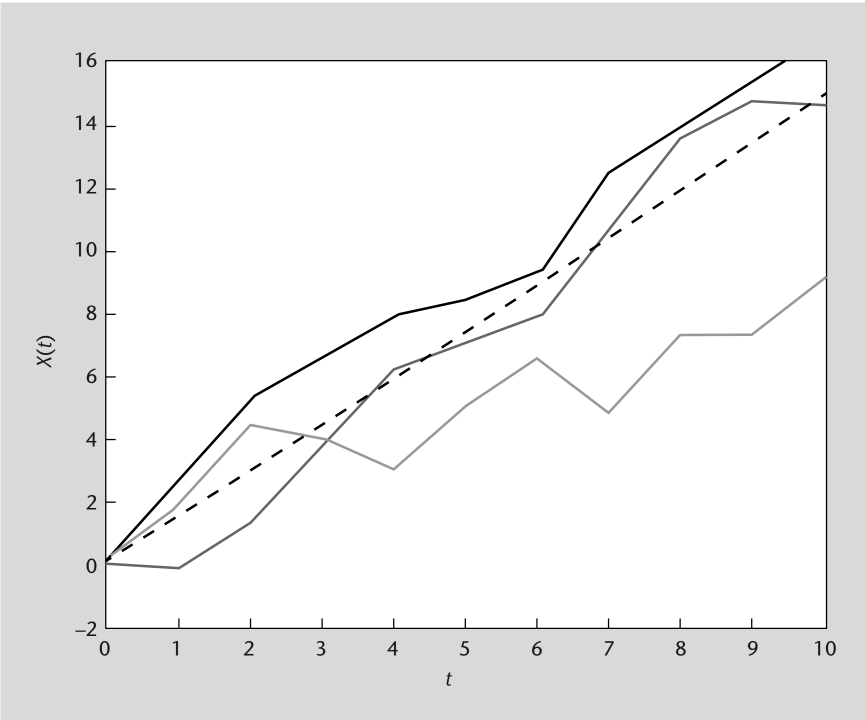


Figura 13

Observad las tres realizaciones del proceso paseo aleatorio y su relación con la recta media $x_0 + mt$.

Resumen

Un **proceso estocástico**, $X(t)$, es la asignación de una función $x(t)$ a cada resultado de un experimento aleatorio. Cada una de estas funciones depende de una variable independiente, que es el tiempo, t. En módulos anteriores, cuando teníamos una variable aleatoria, el resultado de un experimento era un número. Ahora, cuando nos referimos a los procesos estocásticos, cada vez que hacemos un experimento determinado obtenemos una función determinada, $x(t)$, que denominamos **realización** del proceso.

Una manera de simplificar los cálculos a la hora de obtener algunas propiedades de los procesos estocásticos consiste en fijar ciertos valores de la variable independiente t y tratar estos valores como variables aleatorias. Nos podemos fijar, por ejemplo, en cómo se comporta $X(1)$, $X(2)$, etc.

Podemos clasificar los procesos estocásticos en función de la naturaleza de su variable independiente (t en este caso). De este modo, hemos visto que los procesos estocásticos pueden ser:

- **Procesos estocásticos a tiempo discreto**: si t toma valores discretos.
- **Procesos estocásticos a tiempo continuo**: si t toma valores continuos.

Según los valores que toma $X(t)$, podemos diferenciar dos tipos de procesos:

- **Procesos estocásticos de estado discreto**: cuando, en un instante t fijado, la variable aleatoria $X(t)$ es discreta.
- **Procesos estocásticos de estado continuo**: cuando, en un instante t fijado, la variable aleatoria $X(t)$ es continua.

Así pues, podemos clasificar los procesos estocásticos en cuatro tipos:

- Procesos estocásticos a tiempo discreto y de estado discreto.
- Procesos estocásticos a tiempo discreto y de estado continuo.
- Procesos estocásticos a tiempo continuo y de estado discreto.
- Procesos estocásticos a tiempo continuo y de estado continuo.

En este módulo, hemos visto diferentes ejemplos de procesos estocásticos. En algunos casos, las realizaciones de procesos estocásticos son una función determinista, en la que alguno de sus parámetros es una variable aleatoria. El modelo de trayectoria de un proyectil o el voltaje de entrada a un circuito son dos ejemplos de ello. En estos casos, conocemos a grandes rasgos cuál es la for-

ma de la función que obtendremos, y determinando un número de parámetros finito, podemos dibujar la función resultante.

Hay otros procesos estocásticos, sin embargo, que tienen infinitos grados de libertad, es decir, que no se pueden determinar a partir de unos pocos parámetros, y por lo tanto no podemos expresar el proceso $X(t)$ en forma explícita. Es el caso del ruido blanco o del movimiento browniano. Estos procesos modelizan muchos fenómenos naturales. A pesar de que la descripción estadística puede ser muy complicada, podemos calcular algunos parámetros, como por ejemplo el valor medio.

Actividades

1. Dado el proceso estocástico $X(t) = 1 + A\cos t + B\sin t$, en el que A y B son variables aleatorias gaussianas independientes, demostrad que la función $\cos(t-1)+1$ es una realización del proceso $X(t)$.

2. Dado el proceso estocástico $X(t) = At + B(1-t)$, en el que A y B son variables aleatorias independientes uniformes en el intervalo $[0, 2]$, demostrad que la función $1+t$ es una realización del proceso $X(t)$.

3. Dado el proceso estocástico $X(t) = A + B\cos t + C\sin t$, en el que A, B y C son variables gaussianas independientes, demostrad que $\varphi(t) = 2\cos(t-1)$ es una realización del proceso.

4. Dada A, variable aleatoria exponencial de esperanza 1, se define el proceso:

$$X(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq A, \\ 0, & t > A. \end{cases}$$

¿Qué valores puede tomar la variable aleatoria $X(3)$? Mostrad que el proceso es de estado discreto.

5. Dados los procesos siguientes:

$$X(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq B, \\ 2-t, & t > B, \end{cases} \qquad Y(t) = \begin{cases} A-t, & 0 \leq t \leq A, \\ t-A, & t > A. \end{cases}$$

En los que B es una variable aleatoria uniforme en $[0, 2]$ y A es una variable aleatoria exponencial de esperanza 1.

¿Qué valores pueden tomar las variables aleatorias $X(1)$ y $Y(1)$? Razonad si los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son de estado discreto o continuo.

6. Considerad una variable aleatoria V exponencial y los procesos:

$$Y(t) = \begin{cases} t^2+t, & 0 \leq t \leq V, \\ 0, & t > V, \end{cases} \qquad Z(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq V, \\ V+1, & t > V. \end{cases}$$

¿Qué valores pueden tomar las variables aleatorias $Y(2)$ y $Z(2)$? Razonad si alguno de los procesos $Y(t)$ o $Z(t)$ es de estado discreto.

7. Considerad el proceso estocástico $X(t) = (t-A)(t-2A)$ en el que A es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 6]$.

Dadas las funciones $x_1(t) = t^2-3t+3$ y $x_2(t) = t^2-6t+8$, ¿alguna de estas es una realización del proceso $X(t)$?

8. Considerad variables aleatorias A de Bernoulli con $p = \frac{1}{2}$ y exponencial B con $\lambda = 2$. Decid, justificando la respuesta, si los procesos siguientes son de estado discreto o continuo:

$$Y_1(t) = At, \qquad Y_2(t) = At + B, \qquad Y_3(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq B, \\ 0, & t > B. \end{cases}$$

9. Al activar un circuito, aparece una corriente $X(t)$ para $t \geq 0$ que podemos representar como un proceso estocástico:

$$X(t) = (1 + A\cos(10\pi t))e^{-t},$$

en el que A es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[-3, 3]$.

¿Alguna de las funciones $x_1(t) = (2+\cos(10\pi t))e^{-t}$, $x_2(t) = (1+5\cos(10\pi t))e^{-t}$, $x_3(t) = (1-2\cos(10\pi t))e^{-t}$ es una realización del proceso $X(t)$?

10. Decid, justificando la respuesta, si los procesos siguientes son de estado discreto o continuo:

a) $X_1(t) = A\cos t$, en el que A es una variable binomial con $n = 4$, $p = \frac{1}{3}$.

b) $X_2(t) = A\cos t + B\sin t$, en el que A es de Bernoulli con $p = \frac{1}{2}$ y B es exponencial con $\lambda = 1$.

c) $X_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq B, \\ 0, & t > B, \end{cases}$ donde B es exponencial con $\lambda = 1$.

11. La demanda que tiene un centro de suministro de energía a lo largo de un día está determinada por el proceso estocástico:

$$X(t) = 100 + Bt(24 - t),$$

donde $0 \leq t < 24$ es el tiempo en horas y B es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[1, 3]$.

¿Algún valor de α, β o γ hace que las funciones siguientes sean realizaciones del proceso $X(t)$: $x_1(t) = 100 + 48t - \alpha t^2$, $x_2(t) = 100 + 12t - \beta t^2$, $x_3(t) = 100 + \gamma t - 1{,}3t^2$?

Utilizad software matemático para representar gráficamente algunas realizaciones del proceso $X(t)$.

12. Decid, justificando la respuesta, si los procesos siguientes son de estado discreto o continuo:

a) $X_1(t) = \cos(t + W)$, donde W es una variable uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$.

b) $X_2(t) = e^{-Bt}$, donde B es geométrica con $p = \frac{1}{3}$.

c) $X_3(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq A, \\ 0, & t > A, \end{cases}$ donde A es exponencial con $\lambda = 1$.

13. El uso de ancho de banda en una red en función del tiempo está determinado por el proceso estocástico:

$$X(t) = Ae^{-t} + \frac{1}{A},$$

en el que $t \geq 0$ es el tiempo en horas y A es una variable aleatoria con función de densidad: $f_A(a) = \dfrac{a}{2}$ si $0 < a < 2$, y $f_A(a) = 0$ en caso contrario.

¿Algún valor de κ hace que la función siguiente sea una realización del proceso $X(t)$: $\varphi(t) = \kappa + (1 + 2\kappa)e^{-t}$?

Utilizad software matemático para representar gráficamente algunas realizaciones del proceso $X(t)$.

14. A partir de las variables U exponencial de parámetro $\lambda = 2$ y V binomial con $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$ se definen los procesos:

$$X(t) = \cos(t + U), \qquad Y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}Vt\right), \qquad Z(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq U, \\ 0, & t > U. \end{cases}$$

a) ¿Qué valores pueden tomar las variables dadas por los procesos anteriores en $t = 2$, $X(2)$, $Y(2)$, $Z(2)$?

b) Decid, justificando la respuesta, si estos procesos son de estado discreto o continuo.

c) ¿Es posible construir un proceso de estado continuo a partir de una variable aleatoria discreta? Dad un ejemplo de esto o demostrad que no es posible.

15. Un tipo de partícula produce radiación de intensidad descrita por el proceso estocástico:

$$X(t) = J\cos t + (1 - J)\sin t,$$

en el que t es el tiempo y J es una variable aleatoria de Bernoulli con parámetro $p = \frac{1}{2}$.

Decid, de manera justificada, si se trata de un proceso a tiempo discreto o continuo, y si es de estado discreto o continuo.

16. El nivel de carga en un acumulador de energía, para $t \geq 0$, se describe con el proceso:

$$X(t) = A^2 - B^2 t + t^2,$$

en el que A y B son variables uniformes en $[1, 2]$, independientes.

¿Cuál de las funciones siguientes son realizaciones del proceso $\varphi_1(t) = (1-t)^2, \varphi_2(t) = 2 - 3t + t^2, \varphi_3(t) = 4 - 5t + t^2$?

Solucionario

1. $\cos(t-1)+1 = 1+\cos t\cos 1+\sin t\sin 1$. Es la función que resulta cuando $A=\cos 1$ y $B=\sin 1$.

2. $1+t = At+B(1-t)$ se verifica si $A=2, B=1$, de forma que $1+t$ es una realización del proceso.

3. $\varphi(t) = 2\cos 1\cos t+2\sin 1\sin t$. Se da cuando $A=0$, $B=2\cos 1 = 1{,}0806$ y $C=2\sin 1 = 1{,}6829$. Puesto que son variables gaussianas, los valores son posibles.

4. La variable aleatoria $X(3)$ solo puede valer 0 y 3, dado que $X(3) = \begin{cases} 3, & 3\leq A \\ 0, & 3>A. \end{cases}$

En general, $X(t)$ solo puede tomar dos valores: 0 y t. Por lo tanto, fijado t, $X(t)$ es una variable discreta. De este modo, el proceso es de estado discreto.

5. La variable aleatoria $X(1)$ solo puede valer 0 y 1, puesto que: $X(1) = \begin{cases} 0, & 1\leq B \\ 1, & 1>B. \end{cases}$

En general, $X(t)$ solo puede tomar dos valores: 0 y $2-t$. Por lo tanto, fijado t, $X(t)$ es una variable discreta. De esta manera, el proceso $X(t)$ es de estado discreto.

La variable aleatoria $Y(1)$ es: $Y(1) = \begin{cases} A-1, & 1\leq A \\ 1-A, & 1>A \end{cases}$

Y puede tomar cualquier valor positivo, puesto que A varía de 0 a ∞. De este modo, el proceso $Y(t)$ es de estado continuo.

6. Tenemos que: $Y(2) = \begin{cases} 6, & 2\leq V, \\ 0, & 2>V, \end{cases}$ $\qquad Z(2) = \begin{cases} 0, & 2\leq V, \\ V+1, & 2>V. \end{cases}$

$Y(2)$ solo puede valer 0 y 6. En general, $Y(t)$ solo puede tomar dos valores: 0 y t^2+t. Por lo tanto, fijado t, $Y(t)$ es una variable discreta. Así, el proceso $Y(t)$ es de estado discreto.

La variable aleatoria $Z(2)$ solo puede valer 0 o cualquier valor entre 1 y 3. Por lo tanto, $Z(t)$ no es un proceso de estado discreto.

7. Notamos que $X(t) = t^2-3At+2A^2$. $x_1(t)$ no es una realización del proceso, puesto que ningún valor de A nos da esta función (se necesitaría $A=1$ para el término de primer grado, pero entonces el término constante valdría 2). $x_2(t)$ es una realización del proceso, puesto que $A=2$ nos da $X(t) = t^2-6t+8$.

8. A solo puede valer 0 y 1, mientras que B toma cualquier valor entre 0 y ∞.

a) Fijado t, la variable $Y_1(t)$ solo puede tomar dos valores, 0 y t. Así, para todo t, $Y_1(t)$ es una variable discreta y el proceso es de estado discreto.

b) Fijado t, la variable $At+B$ puede tomar cualquier valor positivo. Así, para todo t, $Y_2(t)$ es una variable continua y el proceso es de estado continuo.

c) $Y_3(t)$ es de estado discreto, puesto que fijado t, solo puede tomar dos valores, 0 y t (según sea $B<t$ o $B>t$).

9. Las realizaciones son las funciones que se obtienen dando valores concretos a la variable A. De las tres funciones, solo $x_3(t)$ es una realización, correspondiente a $A=-2$, que pertenece al conjunto de valores posibles de A.

10. a) Dado que A toma solo 5 valores posibles $(0,1,2,3,4)$, fijado t, la variable $X_1(t)$ toma también solo 5 valores posibles. Así, para todo t, $X_1(t)$ es una variable discreta y el proceso es de estado discreto.

b) Dado que B toma un conjunto continuo de valores (de 0 a ∞), lo mismo pasará con la variable $A\cos t + B\sin t$ con t fijado. Así, $X_2(t)$ es una variable continua y el proceso es de estado continuo.

c) $X_3(t)$ es de estado discreto, puesto que fijado t, solo puede tomar dos valores, 0 y 1 (según sea $B < t$ o $B > t$).

11. Las realizaciones son las funciones que se obtienen dando valores concretos a la variable B. Expresando $X(t) = 100+24Bt-Bt^2$, vemos que $x_1(t)$ corresponde a $B = 2$ si hacemos $\alpha = 2$; $x_2(t)$ no es realización de $X(t)$, puesto que sería necesario $B = \frac{1}{2}$, que no pertenece a los posibles valores de B; y $x_3(t)$ corresponde a $B = 1{,}3$ y, por lo tanto, $\gamma = 31{,}2$.

Las realizaciones de $X(t)$ son parábolas con el máximo en $t = 12$.

Figura 14. Realizaciones con $B = 1{,}5$ y $B = 2{,}9$.

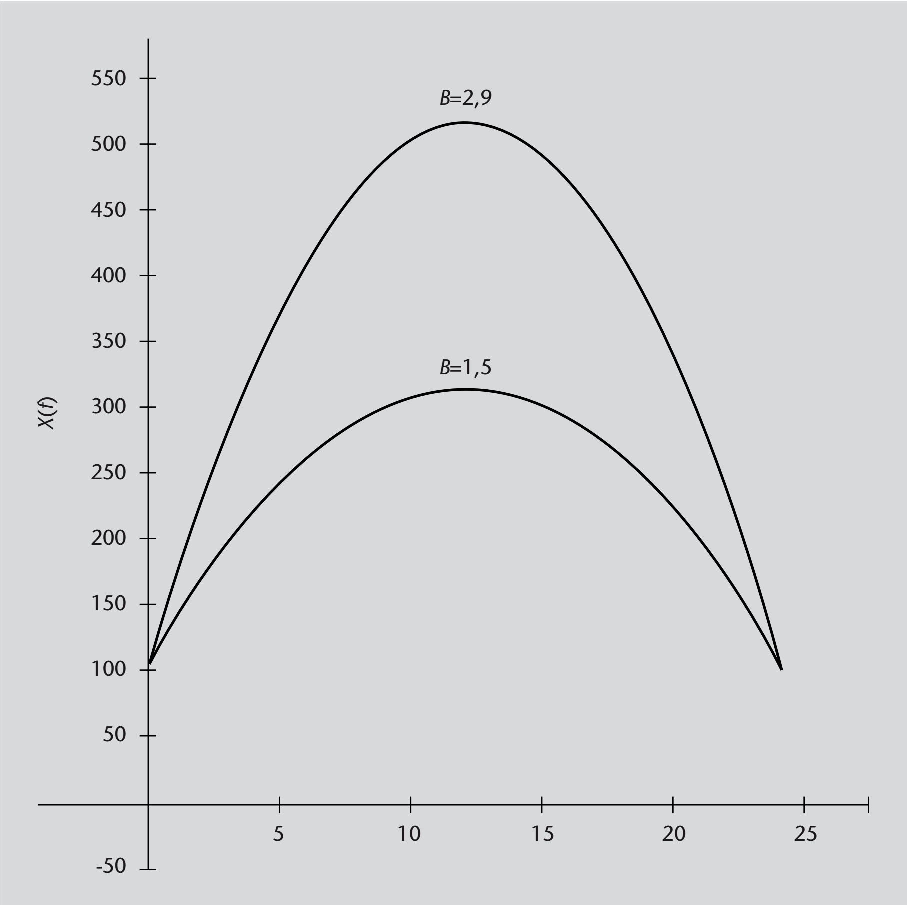


Figura 14

Realizaciones del proceso del ejercicio 11 con $B = 1{,}5$ y $B = 2{,}9$.

12. a) Dado que W es continua, con t fijado, $\cos(t + W)$ también es una variable continua y el proceso es de estado continuo.

b) Dado que B es discreta, fijado t, e^{-Bt} toma también un conjunto numerable de valores y el proceso es de estado discreto.

c) $X_3(t)$ es de estado continuo puesto que, fijado t, puede tomar cualquier valor (entre t y ∞).

13. Las realizaciones son las funciones que se obtienen dando valores concretos a la variable A. Para que $\varphi(t)$ sea una realización, tendría que haber algún valor de A en $[0,2]$ tal que $A = 1+2\kappa$ y $\frac{1}{A} = \kappa$. De este modo, κ tiene que verificar $\frac{1}{\kappa} = 1+2\kappa$, es decir, $2\kappa^2+\kappa-1 = 0$. Las dos soluciones son $\kappa = -1$ y $\kappa = \frac{1}{2}$. La única posible es $\kappa = \frac{1}{2}$, correspondiente a $A = 2$.

Véase en la figura 15 las realizaciones con $A = 0{,}2$, $A = 0{,}5$ y $A = 1{,}5$.

Figura 15. Realizaciones con $A = 0{,}2$, $A = 0{,}5$ y $A = 1{,}5$

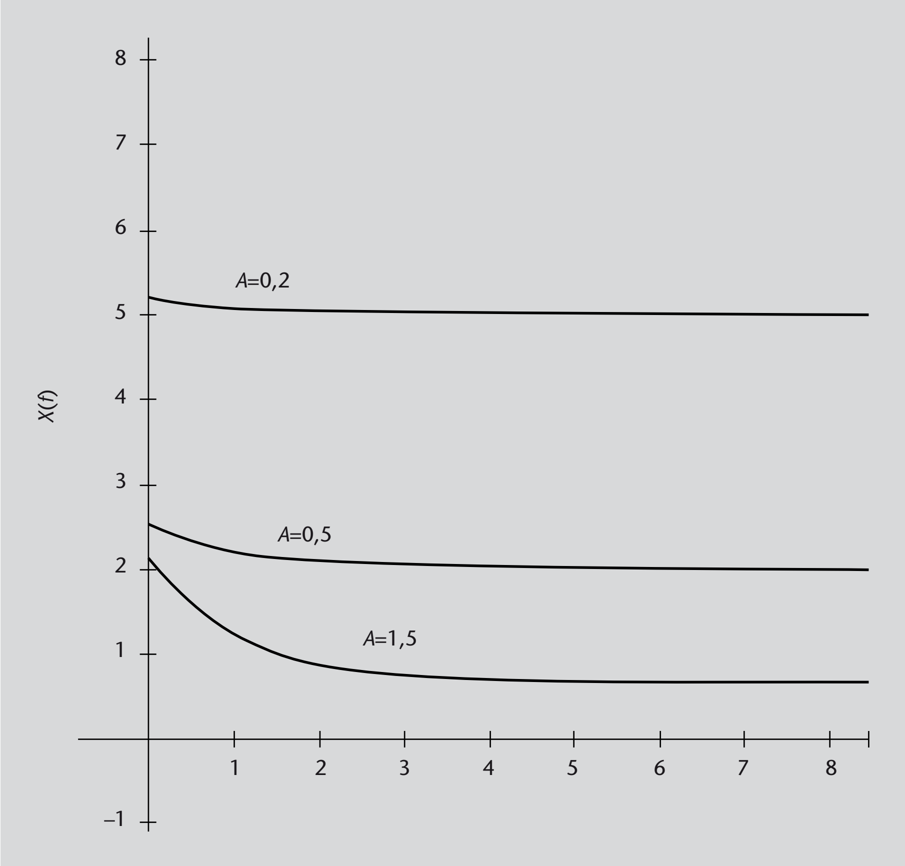


Figura 15

Realizaciones con $A = 0{,}2$, $A = 0{,}5$ y $A = 1{,}5$

14. a) Dado que U toma cualquier valor positivo, $X(2) = \cos(2+U)$ toma valores en todo el intervalo $[-1,1]$. Puesto que V toma valores $0,1,2,3,4$, $Y(2) = \sin(\frac{\pi}{2}V)$ solo puede valer -1, 0 y 1. $Z(2)$ solo puede valer 0 y 1.

b) Generalizando a cualquier t el apartado anterior, vemos que $X(t)$ es de estado continuo e $Y(t)$ y $Z(t)$ son de estado discreto.

c) No es posible, puesto que el proceso sería función de una variable que solo toma un conjunto numerable de valores y tal función solo tomaría, por lo tanto, un conjunto numerable de valores.

15. Está a tiempo continuo, puesto que t es un parámetro real sin ninguna restricción. Es de estado discreto, puesto que con t fijado, solo puede tomar dos valores: $\cos t$ o $\sin t$.

16. Las dos primeras son realizaciones. $\varphi_1(t) = (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2$ se obtiene cuando $A = 1, B = \sqrt{2}$. $\varphi_2(t)$ se obtiene cuando $A = \sqrt{2}$, $B = \sqrt{3}$. $\varphi_3(t)$ no es realización, puesto que requiere $B = \sqrt{5} > 2$, mientras que B toma valores entre 1 y 2.