
Fecha de inicio: 14/03/2020

Consultor: Andrés García Saavedra **Fecha límite de entrega:** 03/04/2020

- Envía la solución en un archivo PDF que has de llamar `PEC2_MT_Apellido1_Apellido2`.
- Justifica siempre tus respuestas.
- Todos los ejercicios puntúan por igual.
- Puedes utilizar software matemático (por ejemplo, CalcMe) para las integrales y las gráficas, pero recuerda que el exámen no se permite usar el software Calcme.

Ejercicios:

1. Sea X una variable aleatoria contínua con función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Se sabe que, dado $X = x$, la variable aleatoria Y se distribuye uniformemente entre $[-x, x]$.
a) Calcula la función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$.
b) Calcula la función de densidad marginal, $f_Y(y)$.

Solución

La teoría para solucionar este ejercicio se puede encontrar en el Módulo 4, apartado 2.

a)Dado $X = x$, la variable aleatoria Y se distribuye uniformemente entre $[-x, x]$. Lo que significa que:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & -x \le y \le x \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto, según la definición de función de densidad condicionada (Definición 2.6, apartado 2, Módulo 4) podemos calcular

$$f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

o, lo que es lo mismo,

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |y| \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

b) Para calcular $f_Y(y)$, usamos la Definición 2.4 de densidad marginal en el Módulo 4:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_{|y|}^{1} 1dx = 1 - |y|.$$

Por lo tanto,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - |y| & 0 \leq |y| \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

2. Sea X una variable aleatoria contínua distribuida uniformemente entre -2 y 2, es decir, $X \sim U(-2,2)$. Sea $Y = g(X)$ otra variable aleatoria función de X donde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Caracterice la función de distribución y la función de densidad de probabilidad de Y.

Solución

Para realizar este ejercicio, se necesita recordar la teoría del módulo 2, apartado 3.6, además del módulo 3, apartado 2.

Evidentemente, Y de distribuye entre 0 y 1, por lo tanto:

$$F_Y(y) = 0, \quad \text{si} \quad y < 0$$
$$F_Y(y) = 1, \quad \text{si} \quad y \geq 1$$

Además, se puede observar también que:

$$P(Y=0)=P(X<0)=\int_{-2}^{0}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}$$
$$P(Y=1)=P(X>1)=\int_{1}^{2}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$$

Además, para el rango $0<y<1$,

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X\le y)=F_X(y)=\int_{-2}^{y}\frac{1}{4}dy=\frac{y+2}{4}$$

De este modo, la función de distribución de Y se caracteriza de la siguiente manera:

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{y+2}{4} & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$$

Se puede observar cómo hay dos saltos en la función de distribución: uno en $y=0$ y otro en $y=1$. Así, recordando los contenidos del Módulo 2, apartado 3.6, Y se trata de una variable aleatoria mixta cuya función de densidad de probabilidad se puede caracterizar como:

$$f_Y(y)=\frac{1}{2}\delta(y)+\frac{1}{4}\delta(y-1)+\frac{1}{4}\left(u(y)-u(y-1)\right).$$

3. Sean U y V dos variables aleatorias discretas con la siguiente función de densidad conjunta:

$U\setminus V$	0	3	5	7
0	0,1	0,1	0,1	0,1
2	0,2	0,2	0,1	0,1

Se definen las variables $X=2U-3V$ y $Y=U+4V$. Se pide:
a) Calcula la función de densidad conjunta de (X,Y).
b) Calcula las funciones de densidad marginales de X e Y.

Solución

a) Para resolver este apartado necesitaremos usar la teoría del Módulo 4, apartado 1.1.

Primero debemos conocer los posibles valores que las nuevas variables pueden tomar. Así pues, para $X = 2U - 3V$ tenemos:

$U \setminus V$	0	3	5	7
0	0	-9	-15	-21
2	4	-5	-11	-17

Y para $Y = U + 4V$:

$U \setminus V$	0	3	5	7
0	0	12	20	28
2	2	14	22	30

Para calcular las probabilidades conjuntas, hacemos lo siguiente:

$$P(X = 0, Y = 2) = \sum_{2u-3v=0,u+4v=2} P(U = u, V = v) = 0$$

ya que

$$2u - 3v = 0$$

y

$$u + 4v = 2$$

se cumple si $u = \frac{6}{11}$ y $v = \frac{4}{11}$, pero $P(U = \frac{6}{11}, V = \frac{4}{11}) = 0$ ya que U o V no toman esos valores.

Análogamente,

$$P(X = 0, Y = 0) = \sum_{2u-3v=0,u+4v=0} P(U = u, V = v) = P(U = 0, V = 0) = 0{,}1.$$

Y así sucesivamente hasta obtener:

b) Para resolver este apartado necesitaremos usar la teoría del Módulo 4, apartado 1.1. Además, usando el apartado a), obtenemos las funciones de probabilidad marginales de X y

$X \setminus Y$	0	2	12	14	20	22	28	30
-21	0	0	0	0	0	0	0,1	0
-17	0	0	0	0	0	0	0	0,1
-15	0	0	0	0	0,1	0	0	0
-11	0	0	0	0	0	0,1	0	0
-9	0	0	0,1	0	0	0	0	0
-5	0	0	0	0,2	0	0	0	0
0	0,1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0,2	0	0	0	0	0	0

Y tan solo sumando filas y columnas, respectivamente:

x_i	-21	-17	-15	-11	-9	-5	0	4
p_i	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

y_j	0	2	12	14	20	22	28	30
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1

4. Sean dos variables aleatorias X_1 y X_2 independientes y uniformemente distribuidas entre 0 y 1, es decir, $X_1 \sim U(0,1)$ y $X_2 \sim U(0,1)$. Calcula la esperanza matemática del máximo entre X_1 y X_2, es decir, $E[\max(X_1, X_2)]$.

Pista: Caracterice primero la función de distribución de $Y := \max(X_1, X_2)$.

Solución

Para realizar este ejercicio, se necesita recurrir a la teoría del módulo 3, apartado 2 y 3.

Para resolver este ejercicio, podemos crear una nueva variable aleatoria Y como función de X_1 y X_2 del siguiente modo: $Y = \max(X_1, X_2)$. Así, nuestro problema consiste en calcular la esperanza matemática de Y. Para ello, debemos analizar sus propiedades estadísticas. La función de distribución de Y es:

$$F_Y(y) = P[Y < y] = P[\max(X_1, X_2) < y]$$

Estudios de Informática, Multimedia y Telecomunicación

Para que $Y < y$ se tiene que cumplir al mismo tiempo $X_1 < y$ y $X_2 < y$, por lo tanto,

$$F_Y(y) = P[\max(X_1, X_2) < y] = P(X_1, X_2 < y)$$

Y, como X_1 y X_2 son independientes,

$$F_Y(y) = P(X_1, X_2 < y) = P(X_1 < y) \cdot P(X_2 < y)$$

La función de distribución de una variable aleatoria uniforme entre 0 y 1 es:

$$F_X(x) = P(X_2 < x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y^2 & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

Una vez caracterizada la función de distribución de Y podemos calcular su función de densidad derivando respecto de y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 2y & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & y > y \end{cases}$$

Y ya podemos calcular su esperanza matemática del siguiente modo:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot 2y dy = \frac{2}{3}$$