# Caracterización estadística y parámetros de los procesos estocásticos

PID_00253301

Josep Maria Aroca

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 4 horas

Universitat Oberta de Catalunya

# Índice

## Introducción

Como hemos visto en módulos anteriores, las variables aleatorias se describen por medio de una función de probabilidad (caso discreto) o de una función de densidad (caso continuo) que contiene toda la información sobre la distribución estadística de la variable. Después, a través de medias se definen parámetros como la esperanza (valor medio) o la varianza. En el caso de los procesos estocásticos se definen magnitudes similares, que tienen importancia especial porque la caracterización estadística completa puede ser muy difícil de conocer en algunos casos prácticos.

**Véase también**

Recordad que los conceptos de función de probabilidad y de densidad de variables aleatorias discretas y continuas se estudian en el módulo "Variables aleatorias".

En este módulo definiremos las funciones que caracterizan toda la estadística de un proceso estocástico. Comenzaremos definiendo las funciones de distribución y de densidad de orden $n$ en el apartado 1. A continuación, en el apartado 2, definiremos una serie de parámetros característicos de los procesos estocásticos, como son las funciones de valor medio, la autocorrelación, la covarianza y la potencia. En el apartado 3 veremos algunos ejemplos de cálculo de parámetros. En la práctica, suele haber métodos más o menos directos para obtener estos parámetros. Aquí, además de utilizar los métodos directos, emplearemos también las funciones de densidad del proceso para dar una visión completa del tema. En el apartado 4 veremos qué son los parámetros cruzados que aparecen cuando comparamos dos procesos estocásticos entre sí.

## Objetivos

Los objetivos que debe alcanzar el estudiante una vez trabajados los materiales didácticos de este módulo son:

**1.** Entender cómo se caracteriza estadísticamente un proceso estocástico.

**2.** Conocer los parámetros de un proceso estocástico.

**3.** Calcular estos parámetros para ciertos tipos de proceso.

**4.** Caracterizar la relación entre dos procesos estocásticos y obtener sus parámetros cruzados.

# 1. Funciones de densidad y distribución de orden $n$

En este apartado consideraremos procesos a tiempo continuo $X(t)$. Tened en cuenta que los procesos a tiempo discreto tienen un tratamiento formalmente similar. A diferencia de lo que sucede con variables o vectores aleatorios, no existe una función de densidad del proceso en conjunto. La caracterización se realiza por medio de la idea siguiente.

Fijados $n$ instantes diferentes $t_1, t_2, \ldots, t_n$, los valores que toma el proceso, $X(t_1)$, $X(t_2), \ldots$, $X(t_n)$, constituyen un vector aleatorio $n$-dimensional. Como ya sabemos describir de manera completa la estadística de los vectores aleatorios, caracterizaremos la estadística de un proceso estocástico del siguiente modo.

**Véase también**

La estadística de los vectores aleatorios se estudia en el módulo "Vectores aleatorios" de esta asignatura.

**Procesos estocásticos y vectores aleatorios**

Para evaluar un proceso estocástico fijaremos una serie de instantes diferentes y consideraremos que en cada instante de tiempo tenemos una variable aleatoria ordinaria. El número $n$ de instantes que fijemos nos dirá cuál es la dimensión del vector aleatorio.

**Proposición 1.1.** La distribución probabilística de un proceso estocástico $X(t)$ queda completamente determinada si, para todo $n \geq 1$ y para toda elección de los instantes $t_1, t_2, \ldots, t_n$, conocemos la distribución probabilística del vector aleatorio $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$.

Es decir, podemos conocer la distribución probabilística de un proceso estocástico, $X(t)$, a partir de la caracterización de las variables aleatorias en ciertos instantes $t_i$. En rigor, puede haber procesos que no verifiquen este resultado. Fuera de estos casos patológicos, los procesos de interés en las aplicaciones prácticas cumplen el enunciado anterior.

La proposición 1.1 nos sugiere hablar de muestra de $n$ instantes para referirnos a la selección de $n$ valores diferentes de $t$ y los valores que toma en ellos el proceso $X(t)$.

**Definición 1.1.** Una **muestra de tamaño** $n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ consiste en la elección de $n$ instantes diferentes $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y en el vector aleatorio asociado a estos instantes $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$.

La distribución estadística de un proceso estocástico queda determinada si conocemos la distribución de todas las muestras posibles. Esto da lugar a los conceptos siguientes.

**Definición 1.2.** Las **funciones de distribución de orden** $n$ de un proceso estocástico $X(t)$ a tiempo continuo son las funciones de distribución de los vectores aleatorios asociados a las muestras de tamaño $n$. Las representamos $F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Entonces

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) = \tag{1}$$

$$P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \ldots, X(t_n) \leq x_n).$$

Según esta definición, la función de distribución de orden $n$ del proceso estocástico $X(t)$ se define como la probabilidad de que el proceso muestreado en estos instantes de tiempo, es decir, $X(t_i)$, sea igual o menor que un cierto valor $x_i$ para $i = 1, ..., n$. Fijaos en que esta es la definición de función de distribución que habíamos considerado para variables aleatorias ordinarias unidimensionales. Aquí hemos extendido esta definición al caso $n$-dimensional.

**Véase también**

Las variables aleatorias ordinarias unidimensionales se estudian en el módulo "Variables aleatorias".

Una vez definidas las **funciones de distribución**, vamos ahora con las **funciones de densidad**.

**Definición 1.3.** Las **funciones de densidad de orden** $n$ de un proceso estocástico $X(t)$ de **estado continuo** son las funciones de densidad de los vectores aleatorios asociados a las muestras de tamaño $n$. Las representamos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Entonces

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) =$$

$$\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)\ dy_1 dy_2 \cdots dy_n. \tag{2}$$

**Observación**

Fijaos en que la definición 1.2 de función de distribución la podemos aplicar a procesos $X(t)$ de estado tanto discreto como continuo. En la definición 1.3, cuando hablamos de funciones de densidad, se especifica que el proceso estocástico $X(t)$ debe ser de estado continuo.

Observad que en esta definición especificamos que el proceso estocástico $X(t)$ es de estado continuo, ya que si recordáis el módulo "Variables aleatorias", habíamos definido la función de distribución para variables discretas y continuas, mientras que la función de densidad la habíamos definido únicamente para variables continuas.

La característica que sí que habíamos definido para las variables aleatorias discretas era la función de probabilidad. Vamos ahora a extender esta definición al caso $n$-dimensional, es decir, al caso de un proceso estocástico $X(t)$ de estado discreto y muestreado para ciertos instantes de tiempo $t_i$.

**Definición 1.4.** La **función de probabilidad de orden** $n$ de un proceso estocástico $X(t)$ de **estado discreto** es la función de probabilidad del vector aleatorio asociado a las muestras de tamaño $n$. La representamos $P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Entonces

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) = \\ P(X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n). \quad (3)$$

**Observación**

Recordad que en el módulo "Variables aleatorias" habíamos definido la función de probabilidad únicamente para las variables aleatorias discretas, ya que en este caso podíamos asociar una probabilidad a un resultado concreto. La definición 1.4, por tanto, la podremos aplicar a procesos estocásticos $X(t)$ a tiempo continuo y de estado discreto.

Así, la caracterización de un proceso estocástico depende de si el proceso es de estado continuo o de estado discreto, tal como se enuncia a continuación.

La distribución estadística de un proceso de estado continuo queda determinada si conocemos las funciones de densidad $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ para todos los valores de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y para todo $n \geq 1$.

La distribución estadística de un proceso de estado discreto queda determinada si conocemos las funciones de probabilidad $P(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ para todos los valores de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y para todo $n \geq 1$.

Hay una serie de vínculos entre estas funciones. Si tomamos la densidad de orden $n$ y calculamos la función de densidad marginal de $k < n$ de sus variables, el resultado debe ser la densidad de orden $k$. Tenemos, pues, una jerarquía de funciones vinculadas. Por ejemplo, si consideramos el orden igual a 1, estamos tomando nuestro proceso estocástico y tomando una única muestra (fijando un valor de $t = t_1$). En este caso tenemos la densidad de orden 1 $f(x_1;\ t_1)$ que nos describe la variable unidimensional $X(t_1)$ ($t_1$ fijado).

Si queremos calcular la densidad de orden 2, hemos de fijar dos instantes de tiempo, $t_1$ y $t_2$, que darán como resultado dos variables aleatorias, $x_1$ y $x_2$. La densidad de orden 2, $f(x_1, x_2;\ t_1, t_2)$, nos describe el vector bidimensional $(X(t_1), X(t_2))$. Si ahora en este vector calculamos la densidad marginal de $X(t_1)$, el resultado ha de ser la densidad correspondiente de primer orden. Es decir:

$$f(x_1;\ t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2;\ t_1, t_2)\, dx_2. \quad (4)$$

Fijaos en que para calcular la densidad marginal de la variable $X(t_1)$ hacemos la integral respecto a la variable, $x_2$.

**Probabilidad y densidad marginal**

En el módulo "Vectores aleatorios" vimos que la función de probabilidad marginal y densidad marginal de un vector consistía en sumar (para variables discretas) o integrar (para variables continuas) respecto a todos los valores posibles del resto de las variables. Para el caso $n = 2$ y para variables discretas, por ejemplo, teníamos: $P(X = a_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X = a_i, Y = b_j)$.

Los valores $t_1, t_2, \ldots, t_n$ figuran en estas funciones para recordarnos en qué instantes tomamos las variables, es decir, en qué instantes estamos tomando muestras del proceso estocástico $X(t)$. Lo que nos interesa en tanto que funciones de densidad es la dependencia de las $x_i$. Las funciones de densidad (o de probabilidad) de orden $n$ se tratan como las de un vector $n$-dimensional cualquiera. Por ejemplo, la condición de normalización de la densidad de primer orden es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\ t)dx = 1. \tag{5}$$

**Condición de normalización**

Como vimos en la proposición 2.3 del módulo "Variables aleatorias", el área total bajo la curva que describe la función de densidad es igual a 1.

La obtención de este conjunto de funciones es, en general, una tarea complicada. Afortunadamente, en las aplicaciones no siempre necesitamos toda esta información, sino que normalmente tenemos suficiente con las funciones de orden bajo, como por ejemplo las de primer y segundo orden. En el caso de procesos que dependen explícitamente de una o pocas variables aleatorias suele ser fácil obtenerlas, como muestran los ejemplos siguientes.

**Ejemplo 1.1**

Dada la variable aleatoria unidimensional $A$, uniforme en el intervalo $[0, 1]$, definimos el proceso $X(t) = e^{At}, t \geq 0$.

Figura 1. Realización del proceso $X(t)$

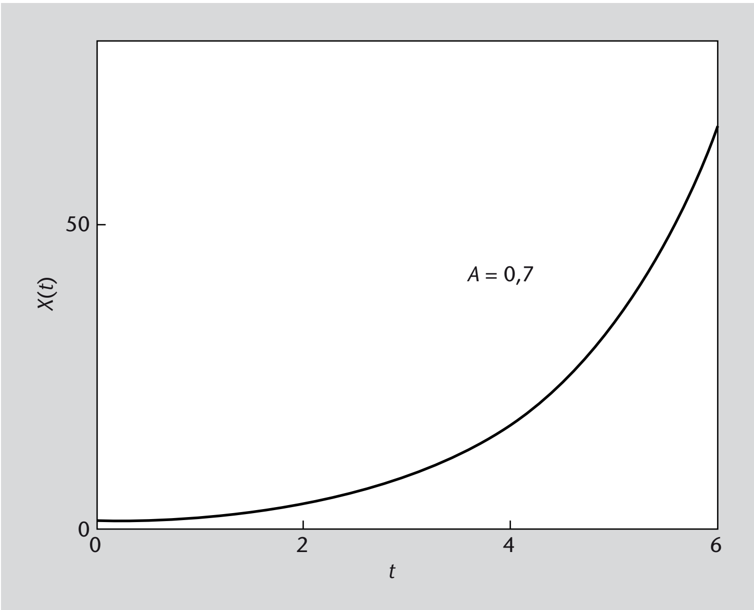



**Figura 1**

Este proceso estocástico es una función exponencial en la que el parámetro $A$ es una variable aleatoria uniforme dentro del intervalo $[0, 1]$.

Como $A$ varía sobre todo un intervalo real, $e^{At}$ para $t$ fijado, también puede tomar valores sobre todo un intervalo. Por tanto, $X(t)$ es un proceso de estado continuo. Calculemos su densidad de primer orden para ilustrar las ideas anteriores. Haremos el cálculo por medio de la función de distribución.

La función de densidad de la variable $A$ (variable aleatoria continua y de tipo uniforme) es:

**Véase también**

Recordad la definición de la variable aleatoria uniforme que vimos en el subapartado 3.2.1 del módulo "Variables aleatorias".

$$f_A(a) = \begin{cases} 1, & 0 \leq a \leq 1, \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

y su función de distribución vale:

$$F_A(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ a, & 0 \leq a < 1, \\ 1, & a \geq 1. \end{cases}$$

Recordemos también que $F_A(a) = P(A \leq a)$. Es decir, la función de distribución de la variable aleatoria $A$ evaluada en el punto $a$ es la probabilidad de que la variable aleatoria $A$ adquiera un valor menor o igual que $a$. Ahora, si fijamos $t$, el proceso estocástico $X(t)$ puede tomar cualquier valor en el intervalo $[1, e^t]$. Si $x$ se encuentra dentro de este intervalo, la función de distribución de primer orden es:

$$F(x;\ t) = P(X(t) \leq x) = P(e^{At} \leq x) = P\left(A \leq \frac{\ln x}{t}\right) = F_A\left(\frac{\ln x}{t}\right) = \frac{\ln x}{t}.$$

Fijaos en que en la tercera igualdad de la expresión anterior lo que hemos hecho es aislar la variable aleatoria $A$ de manera que podamos caracterizar el proceso estocástico $X(t)$ en función de las características de la variable $A$.

En la última igualdad de la expresión anterior hemos sustituido el valor de $a$ por el argumento que aparece en la función de distribución.

Decimos que la función de distribución es de primer orden porque únicamente hemos fijado un único valor de $t$ y, por tanto, tenemos una única variable aleatoria. Si queremos calcular la función de densidad de primer orden, hemos de derivar la función de distribución*,

* Tal como habíamos visto en el módulo "Variables aleatorias".

$$f(x;\ t) = \frac{d}{dx}F(x;\ t) = \frac{1}{tx}, \qquad 1 \leq x \leq e^t.$$

Comprobemos la condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\ t)\,dx = \int_1^{e^t} \frac{1}{tx}dx = \left[\frac{1}{t}\ln x\right]_{x=1}^{x=e^t} = 1.$$

En este tipo de problemas es importante manipular con cuidado los valores límite y la dependencia en los parámetros temporales. Veamos un ejemplo numérico de esto partiendo del proceso $X(t)$ que hemos visto en el ejemplo 1.1.

**Ejemplo 1.2**

Partiendo del ejemplo anterior, consideramos que un dispositivo electrónico se activa cuando $X(t)$ sobrepasa el valor 2. ¿Cuál es la probabilidad $p(t)$ de que en el instante $t$ esté activado?

Se trata de calcular $P(X(t) > 2)$. Lo primero que hemos de tener en cuenta es que el conjunto de valores posibles para $X(t)$ es el intervalo $[1, e^t]$, que varía con $t$. Para que la probabilidad anterior no sea nula, es necesario que este intervalo contenga valores mayores que 2.

Por tanto, $p(t)$ es diferente de cero a partir del momento en el que $2 < e^t$. Si eso sucede, $P(X(t) > 2) = 1 - P(X(t) \leq 2) = 1 - F(2;\ t) = 1 - \frac{\ln 2}{t}$. Es decir:

$$p(X(t) > 2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \ln 2, \\ 1 - \dfrac{\ln 2}{t}, & t > \ln 2. \end{cases}$$

Figura 2. La función $p(t)$

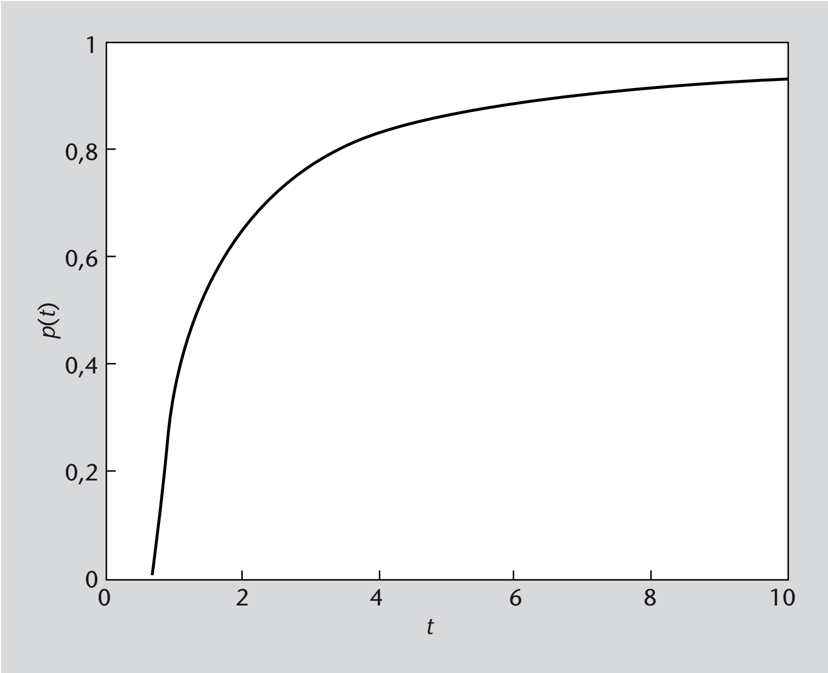



**Figura 2**

La probabilidad $p(t)$ es la probabilidad de que el proceso $X(t)$ tome un valor mayor que 2.

**Ejemplo 1.3**

Modelizamos la llegada de ciertos paquetes críticos de información en una red con la variable aleatoria $A$. Esta variable es uniforme en $[0,1]$. Queremos que cuando llegue uno de estos paquetes de información se genere una señal de sincronización que nos avise de que este acontecimiento se ha producido. A partir de estos requisitos definimos un nuevo proceso de la forma:

$$X(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < A, \\ 1, & A \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Es decir, $X(t)$ pasa bruscamente de 0 a 1 en el instante $t = A$.

Figura 3. Realización del proceso $X(t)$

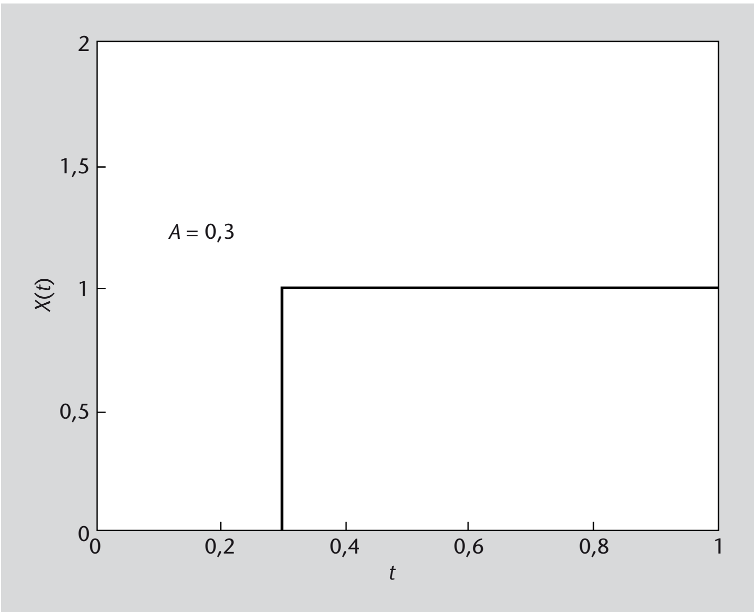



**Figura 3**

Una posible realización del proceso estocástico a tiempo continuo y de estado discreto $X(t)$.

El proceso $X(t)$ es de estado discreto, ya que en cualquier instante solo puede tomar los valores 0 o 1. La función de probabilidad de primer orden $P(n;t) = P(X(t) = n)$ nos da la probabilidad de que $X(t)$ valga $n$, donde $n$ solo puede ser 0 o 1. Así, hemos de determinar

$$P(0;t) = P(X(t)=0) = P(t < A) = 1 - P(A \leq t) = 1 - F_A(t) = 1 - t,$$

$$P(1;t) = P(X(t)=1) = P(A \leq t) = F_A(t) = t.$$

Es inmediato verificar que esta función está normalizada: $P(0;t)+P(1;t) = (1-t)+t = 1$. En muchos casos prácticos no es posible hacer un estudio tan detallado como en los ejemplo anteriores. Muchos procesos se analizan mediante algunos parámetros que los caracterizan. En el apartado siguiente definimos estos parámetros.

**Véase también**

En el apartado 2 de este módulo definiremos, de la misma manera como lo hicimos para las variables aleatorias ordinarias, los parámetros más relevantes de un proceso estocástico: el valor medio, la función de autocorrelación y la autocovarianza. Introduciremos también un nuevo concepto: la función potencia.

## 2. Parámetros de un proceso estocástico. Funciones de valor medio, autocorrelación y autocovarianza. Potencia

De manera análoga a lo que hicimos con las variables aleatorias ordinarias, se definen parámetros estadísticos para los procesos estocásticos. Dado que un proceso es una variable aleatoria dependiente de un índice $t$, ahora tendremos, en lugar de parámetros numéricos, funciones con dependencia temporal.

En el ejemplo 1.1 del inversor con el que empieza el módulo "Introducción a los procesos estocásticos", una estimación de los beneficios que habrá obtenido el día $i$ viene determinada por el **valor medio** de la variable aleatoria $X_i$. Como este valor medio depende, en principio, de $i$, resulta también una función dependiente de esta variable independiente.

En este ejemplo particular no es difícil de evaluar porque $X_i$ es la suma de las ganancias obtenidas los primeros $i$ días. La ganancia obtenida en un día cualquiera tiene como valor medio $p\alpha + (1-p)(-\beta) = 3p - 2(1-p) = 5p - 2$. Como el beneficio en $i$ días es la suma de las ganancias en cada uno de los días, resulta que $\mathrm{E}(X_i) = (5p-2)i$ y, de media, el beneficio tiene comportamiento lineal. De hecho, con este resultado ya vimos que la inversión funcionará bien cuando $p > \frac{2}{5}$.

**Ejemplo del inversor**

Recordad que en el ejemplo del inversor del módulo "Introducción a los procesos estocásticos", $\alpha$ era el beneficio conseguido que se daba con una probabilidad $p$, y le dimos el valor de $\alpha = 3$. El valor $\beta$ eran las pérdidas que se daban con una probabilidad $(1-p)$, y le asignamos un valor de $\beta = 2$.

**Definición 2.1**. La **función de valor medio** de un proceso estocástico $X(t)$ es

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)). \tag{6}$$

La función $m(t)$ es simplemente el valor medio de la variable $X(t)$ en $t$ fijado. La manera de calcularlo depende de cómo se defina el proceso y de si este es de estado continuo o discreto. Para un proceso de estado continuo del que conocemos la densidad de primer orden resulta:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;\ t)\, dx. \tag{7}$$

**Véase también**

Recordad las definiciones de valor medio, esperanza o momento de orden 1 para variables aleatorias discretas y continuas de los subapartados 2.2 y 3.3 del módulo "Variables aleatorias".

Si el proceso es de estado discreto, la expresión es:

$$m(t) = \sum_x x P(x;\ t), \tag{8}$$

donde la suma recorre los posibles valores de $X(t)$. Fijaos en que el sumatorio y la integral están hechos sobre la variable $x$; por tanto, nos queda la dependencia sobre la variable independiente $t$.

Ya veremos en los ejemplos que a veces no es necesario conocer las funciones de primer orden para determinar los parámetros.

La función de valor medio da una idea del comportamiento medio de las distintas realizaciones, pero a veces no tenemos suficiente con esta información. La función $m(t)$ no mide nada de la relación entre los valores de la función en instantes diferentes.

En el ejemplo del inversor, hemos determinado que el valor medio vale $(5p-2)i$. Pongamos que $p = 0{,}7$. La estimación del bebeficio pasados 10 días ($X_{10}$) sería este valor medio, $(5 \cdot 0{,}7 - 2)10 = 15$.

Pero supongamos que nos planteamos la estimación de $X_{10}$ el octavo día y que este día ya sabemos que la ganancia vale $X_8 = 14$. Ahora la estimación de $X_{10} \approx 15$ parece baja, ya que los dos días siguientes podemos ganar $3 + 3 = 6$ con probabilidad $0{,}7^2 = 0{,}49$, podemos ganar $3 - 2 = 1$ con probabilidad $2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}42$ y podemos "ganar" $-2 - 2 = -4$ con probabilidad $0{,}3^2 = 0{,}09$. El valor medio del beneficio de estos dos días es $6 \cdot 0{,}49 + 1 \cdot 0{,}42 + (-2) \cdot 0{,}9 = 3{,}18$. Así, es más correcto tomar como estimación de $X_{10}$ el valor $14 + 3{,}18 = 17{,}18$. Lo que sucede es que las variables $X_8$ y $X_{10}$ tienen una cierta correlación, de manera que conocer el valor de una afecta a la distribución de probabilidad de la otra.

En el caso de procesos estocásticos es habitual tener que hacer alguna predicción de la evolución futura a partir de los resultados del presente o del pasado. Para poder hacer esto, necesitamos alguna información de la correlación entre las variables $X(t)$ en instantes diferentes. La correlación nos da una idea de la relación entre las variables $X(t)$ en instantes diferentes y, por tanto, nos permitirá hacer algún tipo de predicción de valores futuros a partir de valores que ya hemos obtenido. Esto motiva los conceptos siguientes.

**Función de autocorrelación**

En los subapartados 1.3 y 2.4 del módulo "Vectores aleatorios" se define la esperanza del producto de dos variables aleatorias de un vector bidimensional. En este caso denominamos *función de autocorrelación* la esperanza del producto del proceso $X(t)$ evaluado en dos instantes de tiempo $t_1$ y $t_2$.

**Definición 2.2**. La **función de autocorrelación** de un proceso estocástico $X(t)$ es

$$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)], \tag{9}$$

donde $t_1$ y $t_2$ son dos instantes de tiempo fijados.

Es decir, la función de autocorrelación es la esperanza del producto del proceso estocástico evaluado en dos instantes de tiempo diferentes. Fijaos en que es una propiedad de segundo orden, ya que queda determinada por la densidad de segundo orden, es decir, depende de dos instantes temporales diferentes. Si aplicamos esta definición al caso de un proceso estocástico de estado continuo, obtenemos lo siguiente.

Función de autocorrelación para un proceso estocástico de estado continuo:

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2;\ t_1, t_2)\, dx_1 dx_2. \tag{10}$$

De la definición se obtiene inmediatamente que $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$. Esto es útil a veces, ya que implica que es suficiente calcularla para $t_1 \leq t_2$.

El parámetro siguiente de denomina autocovarianza, y se puede obtener a partir de la autocorrelación, tal como se indica a continuación.

**Definición 2.3.** La **función de autocovarianza** de un proceso estocástico $X(t)$ es

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2), \tag{11}$$

donde $t_1$ y $t_2$ son dos instantes de tiempo fijados.

**Covarianza**

Recordad la definición de covarianza que se realiza en el módulo "Vectores aleatorios" en los subapartados 1.3 (para variables discretas) y 2.3 (para variables continuas). Se define como: $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))] = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. Fijaos cómo ahora consideramos las variables $X(t_1)$ y $X(t_2)$ en lugar de $X$ e $Y$.

Es decir, la función de autocovarianza es la función de autocorrelación menos el producto de las funciones valor medio. Es precisamente la covarianza de las variables $X(t_1)$ y $X(t_2)$. En efecto, $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) - \mathrm{E}(X(t_1))\,\mathrm{E}(X(t_2))$ y el primer término es $R(t_1, t_2)$, mientras que el segundo es $m(t_1)m(t_2)$. Así,

$$\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1, t_2). \tag{12}$$

Por tanto, lo que habíamos denominado covarianza en un vector aleatorio $n$-dimensional lo podemos trasladar aquí al caso de un proceso estocástico y lo denominamos función de autocovarianza.

A continuación definimos la potencia media de un proceso estocástico.

**Definición 2.4.** La **potencia media** de un proceso estocástico $X(t)$ es

$$\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2). \tag{13}$$

**Potencia y función de autocorrelación**

Observad que la potencia de un proceso estocástico $X(t)$, $\mathrm{Pot}(t)$, es la función de autocorrelación $R(t_1, t_2)$ evaluada para un único instante temporal, es decir, $R(t, t)$.

Así, vemos que $\mathrm{E}(X(t)^2) = \mathrm{E}[X(t)X(t)] = R(t, t)$. Por lo tanto:

Relación entre la potencia y la autocorrelación:

$$\mathrm{Pot}(t) = R(t, t). \tag{14}$$

El término potencia tiene su origen en el hecho de que si $X(t)$ representa un voltaje o una corriente eléctrica, $X(t)^2$ nos da la potencia absorbida por una resistencia unidad. Como la función de valor medio solo involucra la densidad de primer orden (depende de un único instante temporal, $t$), decimos que es un parámetro de primer orden. De modo similar, decimos que las funciones de autocorrelación y de autocovarianza son parámetros de segundo orden (dependen de los dos instantes temporales $t_1$ y $t_2$).

**Potencia y ley de Ohm**

La potencia absorbida por una resistencia es $P = VI = \frac{V^2}{R} = I^2R$. Si hacemos esta resistencia igual a la unidad, entonces $P = V^2 = I^2$.

También podemos definir momentos de orden arbitrario $n$ como:

$$R^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_n)], \tag{15}$$

aunque no los utilizaremos. Fijaos en que hablamos de momento de orden $n$ porque son funciones que dependen de $n$ instantes temporales.

Si tenemos más de un proceso estocástico, $X(t)$, $Y(t)$, etc, podemos aclarar de qué proceso son los parámetros etiquetándolos con el nombre del proceso: $m_X(t)$, $m_Y(t)$, $R_X(t_1, t_2)$, $C_Y(t_1, t_2)$, $Pot_X(t)$, etc.

## 3. Ejemplos de cálculo de parámetros

En este apartado veremos algunos ejemplos en los que calcularemos los parámetros de diferente orden que hemos definido en los dos apartados anteriores. Es decir, calcularemos la función de valor medio, la función de autocorrelación, la función de autocovarianza y la potencia.

**Ejemplo 3.1**

Calculemos los parámetros de primer y segundo orden para el proceso del ejemplo 1.1. Recordad que el ejemplo 1.1 de este módulo consistía en el proceso estocástico $X(t) = e^{At}$, con $t \geq 0$ y $A$ una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

Como ya conocemos la densidad de primer orden, resulta fácil obtener la función de valor medio:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\ t)\,dx = \int_{1}^{e^t} x\frac{1}{tx}dx = \frac{e^t - 1}{t}.$$

No obstante, existe una manera más directa de obtener el resultado anterior. Cuando un proceso se expresa explícitamente en términos de algunas variables aleatorias, podemos calcular directamente sus parámetros utilizando el teorema de la esperanza:

$$m(t) = \mathrm{E}(e^{At}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} f_A(a)\,da = \int_{0}^{1} e^{at} \cdot 1\,da = \left.\frac{e^{at}}{t}\right|_{a=0}^{a=1} = \frac{e^t - 1}{t}.$$

De manera similar obtenemos la autocorrelación:

$$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}(e^{At_1}e^{At_2}) = \mathrm{E}(e^{A(t_1+t_2)}) = \frac{e^{t_1+t_2} - 1}{t_1 + t_2}.$$

**Función de densidad de primer orden**

Recordad que para este proceso estocástico habíamos calculado la función de densidad de primer orden como: $f(x;\ t) = \frac{1}{tx}$ para $1 \leq x \leq e^t$.

**Teorema de la esperanza**

El teorema de la esperanza nos permite calcular la función de valor medio del proceso $X(t)$ según la función de densidad de la variable aleatoria $A$ sin tener que conocer la función de densidad del proceso estocástico.

**Ejemplo 3.2**

Calculemos la función de valor medio del proceso del ejemplo 1.3. Utilizando la función de probabilidad de primer orden:

$$m(t) = 0 \cdot P(0;\ t) + 1 \cdot P(1;\ t) = t.$$

Con el teorema de la esperanza, explicitamos la dependencia de $A$ poniendo $X(t) = \Phi(t, A)$, que vale 0 o 1 según si $t < A$ o $t > A$, respectivamente:

$$m(t) = \int_{0}^{1} \Phi(t, a) f_A(a)\,da = \int_{t}^{1} 0 \cdot 1\,da + \int_{0}^{t} 1 \cdot 1\,da = t.$$

**Ejemplo 1.3**

El ejemplo 1.3 de este módulo consiste en una función escalón que cambia del valor 0 al valor 1 en un valor $x$ que depende de la variable aleatoria uniforme $A$, definida en el intervalo $[0, 1]$.

La función de autocorrelación se puede calcular siguiendo el procedimiento anterior:

$$R(t_1,t_2) = \int_0^1 \Phi(t_1,a)\Phi(t_2,a)f_A(a)\,da = \int_0^{\text{mín}(t_1,t_2)} 1\cdot 1\,da = \text{mín}(t_1,t_2).$$

Dado que $\Phi(t_1,a)\Phi(t_2,a)$ vale cero excepto cuando $a < t_1$ y $a < t_2$, es decir, cuando $a < \text{mín}(t_1,t_2)$.

**Ejemplo 3.3**

Un generador de señal produce un tono en frecuencia pero a causa de las condiciones ambientales presenta algunas derivas en la amplitud y la fase que genera. Calculemos los parámetros de la oscilación aleatoria siguiente:

$$X(t) = A\cos(\omega t + B),$$

**$X(t) = \Phi(t,A,B)$**

Advertid que ahora nuestro proceso estocástico $X(t)$ contiene la variable independiente $t$ y depende también de las variables aleatorias $A$ y $B$. De esta manera podemos escribir: $X(t) = \Phi(t,A,B)$.

donde $\omega$ es una constante, $A$ es una variable aleatoria exponencial de valor medio $K$, $B$ es una variable aleatoria uniforme en $[0,2\pi]$ y $A$ y $B$ son independientes.

Advertid que tenemos toda la información sobre la variable bidimensional $(A,B)$, de manera que el proceso está bien especificado. Su valor medio vale

$$m(t) = \mathrm{E}(A\cos(\omega t + B)) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(\cos(\omega t + B)),$$

ya que $A$ y $B$ son variables independientes (y, por tanto, también lo son $A$ y $\cos(\omega t+B)$). Ahora, nos dicen que $\mathrm{E}(A) = K$ y podemos calcular, por el teorema de la esperanza,

$$\mathrm{E}(\cos(\omega t + B)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + b)f_B(b)\,db = \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + b)\frac{1}{2\pi}db = 0.$$

Así, concluimos que $m(t) = 0$.

Como sucedía en el ejemplo 4.2 del módulo “Introducción a los procesos estocásticos”, el valor medio es nulo. Esto se debe nuevamente al hecho de que en cualquier instante determinado las diferentes realizaciones difieren en una fase que toma valores sobre un periodo, de modo que tenemos contribuciones positivas y negativas con el mismo peso.

**Oscilaciones aleatorias**

En el ejemplo 4.2 del módulo “Introducción a los procesos estocásticos” vimos una función sinusoidal en la que la amplitud y la fase eran dos variables aleatorias exponencial y uniforme, respectivamente.

La función de autocorrelación se calcula de manera análoga:

$$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}(A\cos(\omega t_1 + B)A\cos(\omega t_2 + B)) = \mathrm{E}(A^2)\,\mathrm{E}(\cos(\omega t_1 + B)\cos(\omega t_2 + B)).$$

El primer factor es, si recordamos la propiedad de la varianza $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(A)^2$,

$$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{E}(A)^2 = K^2 + K^2 = 2K^2.$$

**Variable exponencial**

Una variable exponencial $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ té $\mathrm{E}(X) = \lambda^{-1}$, y entonces el parámetro $\lambda = \mathrm{E}(X)^{-1}$, y $\mathrm{Var}(A) = \lambda^{-2} = \mathrm{E}(X)^2$.

Para el segundo factor, transformamos el producto de coseno mediante la fórmula trigonométrica:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

y obtenemos:

$$E(\cos(\omega t_1 + B)\cos(\omega t_2 + B)) = E\left(\frac{1}{2}[\cos(\omega(t_1+t_2)+2B) + \cos(\omega(t_1-t_2))]\right) =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(\omega(t_1+t_2)+2b)+\cos(\omega(t_1-t_2)))\frac{1}{2\pi}db = \frac{1}{2}\cos(\omega(t_1-t_2)).$$

Así, llegamos al resultado:

$$R(t_1,t_2) = K^2\cos\omega(t_1-t_2).$$

Advertid que, en este caso, $C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2)$, ya que $m(t) = 0$. La potencia vale $\mathrm{Pot}(t) = K^2$.

Vemos que la autocorrelación, en este ejemplo, solo depende de la distancia entre los instantes $t_1$ y $t_2$. Además, cuando $t_2 = t_1$ es máxima. Esto es un comportamiento típico, ya que cuando $t_2 = t_1$ las variables $X(t_1)$ y $X(t_2)$ son la misma y, por tanto, tenemos la máxima correlación.

**Ejemplo 3.4**

Sea $B$ una variable aleatoria exponencial de esperanza 1. Definimos un proceso estocástico de la manera siguiente:

$$X(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < B, \\ B, & t \ge B. \end{cases}$$

¿Cómo son sus realizaciones? En la figura 4 mostramos una de ellas.

Figura 4. Realización de $X(t)$. ($B = 1{,}5$)

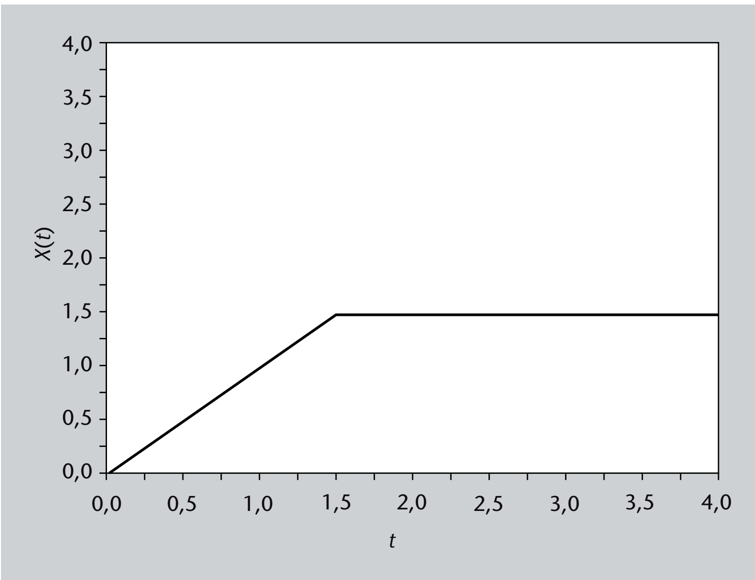



**Figura 4**

En la figura se muestra una realización posible del proceso estocástico del ejemplo 3.4. $X(t)$ toma el valor de $t$ hasta llegar a un valor $B$. $B$ es una variable aleatoria exponencial de valor medio igual a 1.

Calculemos la función de valor medio del proceso $X(t)$. Se trata de $m(t) = E(X(t))$. Como $X(t)$ depende de una variable $B$, utilizaremos el teorema de la esperanza. $X(t)$ es una función de $B$. Advertid que la función de densidad de $B$ es $f_B(b) = e^{-b}, b \ge 0$. En la definición de $X(t)$ vemos que $X(t) = B$ si $0 \leq B \leq t$ mientras que $X(t) = t$ si $B \geq t$. Así separaremos la integración sobre $b$ según estos dos casos:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_B(b)\, db = \int_0^t b\, e^{-b} db + \int_t^{\infty} t\, e^{-b} db$$

$$= (-(t+1)e^{-t} + 1) + (te^{-t}) = 1 - e^{-t}.$$

La función $m(t)$ se muestra en la figura 5. Aunque las realizaciones muestran un punto en el que la función no es derivable, el valor medio no muestra ninguna irregularidad.

Figura 5. Valor medio de $X(t)$

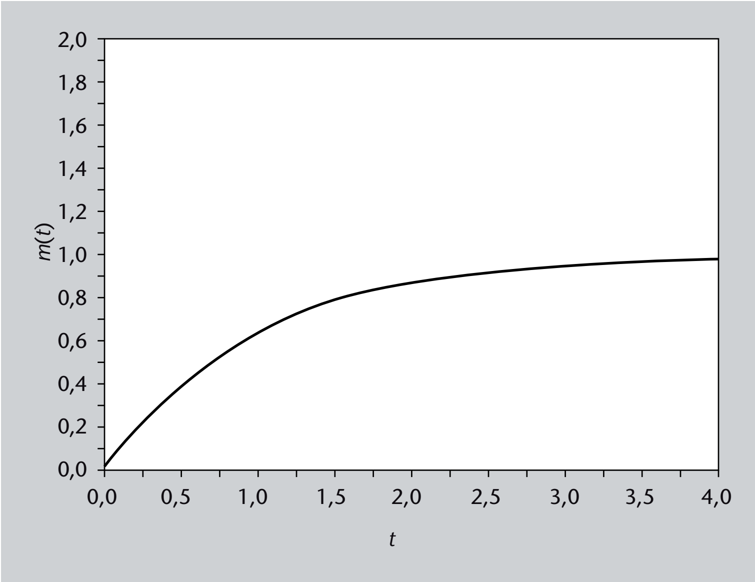



**Figura 5**

La gráfica muestra el valor medio del proceso $X(t)$.

En este punto podemos ir un paso más allá y preguntarnos si, de la misma manera que hemos relacionado los valores de un proceso estocástico definidos en diferentes instantes temporales, podemos relacionar procesos estocásticos diferentes entre sí. Eso es lo que haremos en el apartado 4 de este módulo.

## 4. Parámetros cruzados. Procesos independientes

Un proceso estocástico $X(t)$ implica la existencia de una variable aleatoria diferente para cada instante $t$. Los parámetros que hemos definido anteriormente miden propiedades de este conjunto de variables. Se puede dar el caso, también, de tener que considerar más de un proceso estocástico. Si $X(t)$ e $Y(t)$ son dos procesos estocásticos, podemos estudiar su estadística conjunta. Esto da lugar a nuevos parámetros. Veámoslos a continuación.

**Definición 4.1.** La **función de correlación cruzada** de dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ es

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)Y(t_2)], \tag{16}$$

donde $t_1$ y $t_2$ son dos instantes de tiempo fijados.

Fijaos en que la definición matemática es la misma que la que habíamos hecho en el apartado anterior, pero ahora evaluamos el proceso $X$ en el instante de tiempo $t_1$ y el proceso $Y$ en $t_2$. Por tanto, podemos decir que la autocorrelación de $X(t)$ sería la correlación cruzada de $X(t)$ con él mismo.

**Definición 4.2.** La **función de covarianza** de dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ es

$$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2), \tag{17}$$

donde $t_1$ y $t_2$ son dos instantes de tiempos fijados.

Observad que la función de covarianza de las variables $X(t_1)$ e $Y(t_2)$, $C_{XY}(t_1, t_2)$ tiene la misma forma que la función de autocovarianza que hemos visto en la definición 2.3 de este módulo. Allí habíamos comparado el proceso $X(t)$ en dos instantes de tiempo diferentes. Ahora lo que comparamos son dos procesos estocásticos, $X(t)$ e $Y(t)$, en dos instantes de tiempo diferentes.

**Definición 4.3.** Dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ son **independientes** si cualquier muestra de $X(t)$ es independiente de cualquier muestra de $Y(t)$.

En particular, las variables $X(t_1)$, $Y(t_2)$ son independientes para todo $t_1, t_2$.

Si $X(t)$, $Y(t)$ son procesos independientes, entonces $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$, ya que por independencia $\mathrm{E}[X(t_1)Y(t_2)] = \mathrm{E}(X(t_1))\,\mathrm{E}(Y(t_2))$, es decir, $R_{XY}(t_1, t_2) = m_X(t_1)m_Y(t_2)$.

**Ejemplo 4.1**

Modelicemos el nivel de ocupación de una línea de comunicación mediante un proceso estocástico que denominamos $Z(t)$. Sabemos que el nivel de ocupación de la línea se debe a un proceso estocástico de entrada que denominamos $X(t)$ y a una señal de ruido que denominamos $Y(t)$. Por tanto, podemos expresar el proceso $Z(t)$ como suma de los procesos $X(t)$ e $Y(t)$:

$$Z(t) = X(t) + Y(t). \tag{18}$$

Supongamos que $X(t)$ tiene valor medio $m_X(t)$ y autocorrelación $R_X(t_1, t_2)$, e $Y(t)$ tiene valor medio $m_Y(t)$ y autocorrelación $R_Y(t_1, t_2)$.

Utilizando las propiedades de la esperanza encontramos los parámetros estadísticos siguientes:

Valor medio de $Z(t)$:

$$m_Z(t) = m_X(t) + m_Y(t). \tag{19}$$

Autocorrelación de $Z(t)$:

$$R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) + R_Y(t_1, t_2) + R_{XY}(t_1, t_2) + R_{XY}(t_2, t_1). \tag{20}$$

Advertid que si $X(t)$ e $Y(t)$ son independientes:

$$R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) + R_Y(t_1, t_2) + m_X(t_1)m_Y(t_2) + m_X(t_2)m_Y(t_1). \tag{21}$$

Haciendo $t_1 = t_2 = t$ encontramos la potencia de la suma de procesos independientes:

$$\mathrm{Pot}_Z(t) = \mathrm{Pot}_X(t) + \mathrm{Pot}_Y(t) + 2m_X(t)m_Y(t). \tag{22}$$

## Resumen

En este módulo hemos estudiado cómo podemos caracterizar estadísticamente los procesos estocásticos y sus parámetros.

Los procesos estocásticos se pueden tratar fijando unos ciertos momentos de tiempo, es decir, muestreando el proceso y estudiando cómo se comporta la variable aleatoria resultante para cada $t$ fijado. El número de muestras que tomamos nos permite crear un vector de variables aleatorias de dimensión $n$, $(X(t_1),\ldots,X(t_n))$. Esto permite definir para los procesos estocásticos una función de distribución que caracteriza el proceso. Recordad que ya habíamos estudiado esta noción para las variables aleatorias. Las funciones de distribución de un proceso estocástico de orden $n$ (de $n$ muestras) nos dicen cuál es la probabilidad de que cada una de las muestras $X(t_i)$ sea igual o menor que un cierto valor $x_i$.

A partir de esto hay que diferenciar entre los procesos estocásticos de estado continuo y de estado discreto. Para los procesos de estado continuo hemos definido las funciones de densidad de orden $n$. En el caso de los procesos estocásticos de estado discreto hemos de trabajar con las funciones de probabilidad.

Así pues, con algunos matices, podemos tratar un proceso estocástico a tiempo continuo, $X(t)$, mediante vectores $n$-dimensionales si tomamos $n$ muestras del proceso, $(X(t_1),\ X(t_2),\ldots,X(t_n))$. Esto nos permite caracterizar este tipo de procesos estocásticos a partir de los parámetros siguientes:

- **Función de valor medio**: $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$
- **Función de autocorrelación**: $R(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]$
- **Función de autocovarianza**: $C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2)$
- **Potencia**: $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = R(t,t)$

Finalmente, también podemos comparar diferentes procesos estocásticos entre sí estudiando su estadística conjunta. En particular, si $X(t)$ e $Y(t)$ son dos procesos estocásticos, y $t_1$ y $t_2$ son dos instantes de tiempo fijados, podemos definir:

- **Función de correlación cruzada**: $R_{XY}(t_1,t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)Y(t_2))$
- **Función de covarianza**: $C_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2)$

Esto nos permite definir la noción de **procesos estocásticos independientes**. Formalmente, $X(t)$ e $Y(t)$ son independientes si cualquier muestra de $X(t)$ es independiente de cualquier muestra de $Y(t)$. En particular, las variables $X(t_1)$, $Y(t_2)$ son independientes para todo $t_1,t_2$.

## Actividades

**1.** Leed con atención el ejemplo 1.1. Ahora, con la misma variable $A$ considerad el proceso $X(t) = At$. Calculad su función de densidad de primer orden y demostrad que, con $t$ fijado, $X(t)$ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, t]$.

**2.** Leed con atención el ejemplo 3.1 de este módulo. Para el proceso del ejercicio anterior:

**a)** Calculad su valor medio. Hacedlo de dos maneras, tal como se hace en el ejemplo 3.1.

**b)** Calculad su función de autocorrelación, la función de autocovarianza y la potencia. Hacedlo aplicando el teorema de la esperanza, tal como se hace en el ejemplo 3.1.

**c)** ¿Cuál es la esperanza de las variables aleatorias siguientes: $X(1)$, $X(3)-X(2)$, $X(1)X(2)$, $X(3)^2$?

**3.** Demostrad que si $C(t_1, t_2)$ es la función de autocovarianza de un proceso, entonces la varianza de la variable $X(t)$ con $t$ fijado está determinada por $C(t, t)$.

Para el proceso $X(t)$ del primer ejercicio:

**a)** ¿Cuánto valen las varianzas de las variables $X(2)$ y $X(3)$?

**b)** ¿Cuánto vale la covarianza de la variable bidimensional $(X(2), X(3))$?

**c)** Para la variable bidimensional $(X(2), X(3))$, ¿cuál es el coeficiente de correlación $\rho$? ¿A qué se debe el resultado?

**4.** $B$ es una variable aleatoria de esperanza 0 y varianza 1. Obtenemos tres valores independientes de esta variable, $B_1, B_2, B_3$, y consideramos el proceso:

$$Y(t) = B_1 + B_2 \cos t + B_3 \sin t.$$

Calculad el valor medio $m(t)$ y la autocorrelación $R(t_1, t_2)$ de este proceso.

**5.** Repetid el ejemplo 3.4 para el caso en el que $B$ es una variable uniforme en $[0, 2]$.

**6.** Repetid el ejemplo 3.4 para el caso:

$$X(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{A}, & 0 \leq t < A, \\ \dfrac{1-t}{1-A}, & A \leq t \leq 1. \end{cases}$$

donde $A$ es una variable uniforme en $[0, 1]$.

Comparad la forma de las realizaciones con la forma del valor medio.

**7.** Considerad dos variables aleatorias $A$ y $B$ tales que $A$ es uniforme en el intervalo $[-1, 1]$, $B$ es uniforme en el intervalo $[0, 2]$, y son independientes. Considerad también el proceso estocástico:

$$X(t) = At + B.$$

**a)** Calculad las esperanzas siguientes: $\mathrm{E}(A), \mathrm{E}(B)$, $\mathrm{E}(A^2), \mathrm{E}(B^2)$, $\mathrm{E}(AB)$.

**b)** Calculad la función de valor medio del proceso $X(t)$.

**c)** Calculad la función de autocorrelación, la función de autocovarianza y la potencia del proceso $X(t)$.

**d)** Si fijamos los instantes $t = 1$ y $t = 2$ se obtiene una variable aleatoria bidimensional $(X(1), X(2))$. Utilizando las funciones calculadas en los dos apartados anteriores, calculad: la esperanza y la varianza de estas dos variables, su covarianza, $\mathrm{Cov}(X(1), X(2))$, y su coeficiente de correlación $\rho$.

**8.** Dada $A$, variable aleatoria exponencial de esperanza 1, se define el proceso:

$$X(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le A \\ 0, & t > A \end{cases}$$

**a)** Calculad la función de valor medio, $m(t)$, utilizando el teorema de la esperanza.

**b)** Calculad la función de probabilidad de primer orden $P(x;\ t)$. (Es decir, fijado $t$, ¿qué valores puede adquirir $X(t)$ y cuáles son sus probabilidades?)

**c)** Volved a calcular la función de valor medio del proceso, ahora a partir de la función anterior $P(x;\ t)$.
Indicación: para los dos últimos apartados tened presente el ejemplo 1.3.

**9.** Considerad dos variables aleatorias $U$ y $V$, independientes, con funciones de densidad:

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u, & 0 \le u \le 2, \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases} \qquad f_V(v) = \begin{cases} \frac{7}{2}v^6, & -1 \le v \le 1, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Considerad también el proceso estocástico:

$$X(t) = U + V \sin t.$$

**a)** Calculad las esperanzas siguientes: $\mathrm{E}(U), \mathrm{E}(V)$, $\mathrm{E}(U^2), \mathrm{E}(V^2)$,$\mathrm{E}(UV)$.

**b)** Calculad la función de valor medio, la función de autocorrelación y la función de autocovarianza del proceso $X(t)$.

**c)** ¿En qué instantes es máxima la potencia del proceso $X(t)$?

**d)** Si fijamos los instantes $t = \frac{\pi}{6}$ y $t = \frac{\pi}{2}$ se obtiene una variable aleatoria bidimensional $(X(\frac{\pi}{6}), X(\frac{\pi}{2}))$. Utilizando las funciones calculadas en los dos apartados anteriores, calculad: la esperanza y la varianza de estas dos variables, la covarianza $\mathrm{Cov}(X(\frac{\pi}{6}), X(\frac{\pi}{2}))$ y el coeficiente de correlación $\rho$.

**10.** Calculad la función de valor medio, $m(t)$, de los procesos siguientes (utilizando el teorema de la esperanza).

**a)** $X(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le B, \\ 2 - t, & t > B, \end{cases}$

donde $B$ es una variable aleatoria uniforme en $[0, 2]$.

**b)** $Y(t) = \begin{cases} A - t, & 0 \le t \le A, \\ t - A, & t > A, \end{cases}$

donde $A$ es una variable aleatoria exponencial de esperanza 1.

**11.** Considerad el proceso estocástico:

$$X(t) = Ae^t + B,$$

donde $A$ y $B$ son dos variables aleatorias independientes, exponenciales de parámetro $\lambda = 1$.

**a)** ¿Cuánto valen las esperanzas siguientes: $\mathrm{E}(A), \mathrm{E}(B)$, $\mathrm{E}(A^2), \mathrm{E}(B^2)$,$\mathrm{E}(AB)$?

**b)** Calculad la función de valor medio, la función de autocorrelación y la función de autocovarianza del proceso $X(t)$.

**c)** ¿En qué instante la potencia del proceso $X(t)$ vale 26?

**d)** Si fijamos los instantes $t = 0$ y $t = \ln 2$, se obtiene una variable aleatoria bidimensional $(X(0), X(\ln 2))$. Utilizando las funciones calculadas en los apartados anteriores, calculad: la esperanza y la varianza de estas dos variables, la covarianza $\mathrm{Cov}(X(0), X(\ln 2))$ y el coeficiente de correlación $\rho$.

**12.** Considerad una variable aleatoria $V$ con función de densidad: $f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{(v+1)^2}, & v \geq 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$

Calculad la función de valor medio, $m(t)$, de los procesos siguientes (utilizando el teorema de la esperanza).

**a)** $Y(t) = \begin{cases} t^2 + t, & 0 \leq t \leq V, \\ 0, & t > V. \end{cases}$

**b)** $Z(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq V, \\ V+1, & t > V. \end{cases}$

**13.** Considerad el proceso estocástico:

$$X(t) = (t - A)(t - 2A),$$

donde $A$ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 6]$.

**a)** Calculad la función de valor medio del proceso $X(t)$. (Indicación: calculad primero las esperanzas de $A$ y de $A^2$.)

**b)** Si fijamos el instante $t=0$ se obtiene una variable aleatoria $X(0)$. ¿Cuánto vale su varianza?

**c)** Sea $M$ el valor mínimo que adquiere $X(t)$. Calculad la probabilidad de que $M$ sea mayor que $-1$.

**14.** Considerad el proceso estocástico:

$$X(t) = Ae^{-Bt},$$

donde $A$ y $B$ son dos variables aleatorias independientes, exponenciales de parámetro $\lambda = 1$.

**a)** Calculad la función de valor medio, la función de autocorrelación y la función de autocovarianza del proceso $X(t)$.

**b)** Si fijamos los instantes $t = 0$ y $t = 1$ se obtiene una variable aleatoria bidimensional $(X(0), X(1))$. Utilizando las funciones calculadas en los apartados anteriores, calculad: la esperanza y la varianza de estas dos variables, la covarianza $\mathrm{Cov}(X(0), X(1))$ y el coeficiente de correlación $\rho$.

**15.** Considerad una variable aleatoria $V$ uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Calculad la función de valor medio, $m(t)$, del proceso siguiente (utilizando el teorema de la esperanza):

$$X(t) = \begin{cases} t^2 - Vt, & \text{si } 0 \leq t \leq V, \\ t^2 - (V+1)t + V, & \text{si } V < t \leq 1. \end{cases}$$

**16.** Si $X(t)$ es un proceso estocástico que representa cierta señal, podemos considerar la presencia de ruido representándolo con un proceso $N(t)$ y considerando que medimos el proceso $Z(t) = X(t) + N(t)$. En lo que sigue supongamos que $X(t)$ y $N(t)$ son independientes y que $N(t)$ tiene valor medio cero ($m_N(t) = 0$).

**a)** Demostrad que la función de autocorrelación de $Z(t)$ es la suma de las autocorrelaciones de $X(t)$ y de $N(t)$:

$$R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) + R_N(t_1, t_2).$$

**b)** Si $X(t)$ tiene potencia constante igual a 2, y $N(t) = \sin(t - B)$ donde $B$ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, \pi]$, ¿cuál es la potencia de $Z(t)$?

**17.** Al activar un circuito aparece una corriente $X(t)$ para $t \geq 0$ que podemos representar como un proceso estocástico:

$$X(t) = (1 + A\cos(10\pi t))e^{-t},$$

donde $A$ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[-3, 3]$.

**a)** Calculad la función de valor medio del proceso $X(t)$.

**b)** Considerad la variable aleatoria dada por la corriente en el instante $t = \frac{1}{2}$: $X(\frac{1}{2})$. ¿Qué vale su varianza?

**c)** Un componente del circuito envía una señal si la corriente $X(t)$ se hace negativa en algún instante. ¿Cuál es la probabilidad de que esto llegue a suceder?

**18.** Considerad el proceso estocástico:

$$X(t) = A + \frac{B}{1+t},$$

donde $A$ y $B$ son dos variables aleatorias independientes, gaussianas de parámetros $m_A = 1$, $\sigma_A = 1$, $m_B = 0$, $\sigma_B = 1$.

**a)** Calculad la función de valor medio, la función de autocorrelación y la función de autocovarianza del proceso $X(t)$.

**b)** Si fijamos los instantes $t = 0$ y $t = 1$ se obtiene una variable aleatoria bidimensional $(X(0), X(1))$. Utilizando las funciones calculadas en los apartados anteriores, calculad: la esperanza y la varianza de estas dos variables, la covarianza $\text{Cov}(X(0), X(1))$, y el coeficiente de correlación $\rho$.

**19.** Considerad una variable aleatoria $Z$ uniforme en el intervalo $[1, 2]$. Calculad la función de valor medio, $m(t)$, del proceso siguiente (utilizando el teorema de la esperanza):

$$X(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq Z, \\ \dfrac{Z+1}{t+1}, & t > Z. \end{cases}$$

(Indicación: ved gráficamente cómo son las realizaciones del proceso. Observad que para $0 \leq t < 1$ siempre es $X(t) = 1$, con lo que $m(t) = 1$ para $0 \leq t < 1$. También tenemos que para $t > 2$ es $X(t) = \frac{Z+1}{t+1}$, con lo que podéis demostrar que $m(t) = \frac{5}{2(t+1)}$ para $t > 2$. Haced finalmente el análisis para $1 < t < 2$, que requiere tener en cuenta los dos comportamientos de la definición de $X(t)$. Podéis utilizar software matemático para calcular las integrales.)

**20.** La señal que transmite mensajes en un canal de comunicación es un proceso $X(t)$ con valor medio $m_X(t) = 10$ y potencia $\text{Pot}_X(t) = 150$. En la salida medimos $Y(t) = X(t) + Q(t)$, donde $Q(t)$ es el ruido introducido por el canal, independiente de $X(t)$, con valor medio $m_Q(t) = 2$ y potencia $\text{Pot}_Q(t) = 6$.

**a)** Calculad la potencia de $Y(t)$.

**b)** Encontrad el valor de la constante $a$ tal que el proceso $Z(t) = aY(t)$ tenga el mismo valor medio que $X(t)$. ¿Qué vale, en este caso, la potencia de $Z(t)$?

**21.** La demanda que tiene un centro de suministro de energía a lo largo de un día está determinada por el proceso estocástico:

$$X(t) = 100 + Bt(24 - t),$$

donde $0 \leq t < 24$ es el tiempo en horas y $B$ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[1, 3]$.

**a)** Calculad la función de valor medio del proceso $X(t)$.

**b)** Considerad la variable aleatoria dada por la demanda en el instante $t=3$, $X(3)$. ¿Cuánto vale su varianza?

**c)** En el centro se debe activar un procedimiento especial si en algún momento $X(t) > 500$. ¿Cuál es la probabilidad de que esto llegue a pasar en un día?

**22.** El campo eléctrico creado en un punto por una línea de alta tensión está determinado por el proceso estocástico:

$$X(t) = U \sin t + V \sin 2t,$$

donde $U$ y $V$ son dos variables aleatorias independientes, de esperanza 0 y desviación 1.

**a)** Calculad la función de valor medio, la función de autocorrelación y la función de autocovarianza del proceso $X(t)$.

**b)** Si fijamos los instantes $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{\pi}{2}$ se obtiene una variable aleatoria bidimensional $(X(\frac{\pi}{3}), X(\frac{\pi}{2}))$. Utilizando las funciones calculadas en el apartado anterior, calculad: la esperanza y la varianza de estas dos variables, su covarianza $\mathrm{Cov}(X(\frac{\pi}{3}), X(\frac{\pi}{2}))$, y su coeficiente de correlación $\rho$.

**23.** La activación de un circuito produce una corriente descrita por el proceso:

$$X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{Z}, & 0 \leq t \leq Z, \\ 0, & t > Z. \end{cases}$$

donde $Z$ es una variable aleatoria con función de densidad $f_Z(z) = \frac{z^2}{2} e^{-z}$ para $z \geq 0$ (y $f_Z(z) = 0$ en caso contrario). Calculad la función de valor medio, $m(t)$, del proceso $X(t)$.

**24.** La potencia de un proceso está determinada por $\mathrm{Pot}(t) = R(t,t)$ o, sin haber calculado la función de autocorrelación, se puede calcular directamente por medio de $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2)$.

Calculad la potencia de los procesos de los dos problemas anteriores aplicando el método que os parezca más apropiado.

**25.** La ocupación de ancho de banda en una red en función del tiempo está determinada por el proceso estocástico:

$$X(t) = Ae^{-t} + \frac{1}{A},$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo en horas y $A$ es una variable aleatoria con función de densidad: $f_A(a) = \dfrac{a}{2}$ si $0 < a < 2$, y $f_A(a) = 0$ en caso contrario.

**a)** Calculad la función de valor medio del proceso $X(t)$.

**b)** Considerad la variable aleatoria dada por el decrecimiento de $X(t)$ entre los instantes $t=0$ y $t=1$, $V = X(0) - X(1)$. ¿Cuánto vale su varianza?

**c)** Calculad la probabilidad de que en el instante $t = 2$ la ocupación de ancho de banda sea superior a 2.

**26.** La carga acumulada por una placa solar está determinada por el proceso estocástico:

$$X(t) = Rt + S \cos \pi t,$$

donde $R$ es una variable uniforme en $[1, 3]$, $S$ es una variable uniforme en $[-1, 1]$, y $R$ y $S$ son independientes.

**a)** Calculad la función de valor medio, la función de autocorrelación y la función de autocovarianza del proceso $X(t)$.

**b)** Si fijamos los instantes $t = 0$ y $t = 1$ se obtiene una variable aleatoria bidimensional $(X(0), X(1))$. Utilizando las funciones calculadas en el apartado anterior, calculad: la esperanza y la varianza de estas dos variables, su covarianza $\mathrm{Cov}(X(0), X(1))$, y su coeficiente de correlación $\rho$.

**c)** el término $S \cos \pi t$ es una corrección debida a factores internos de la placa. Calculad la potencia del proceso, primero sin esta corrección y después teniéndola en cuenta.

¿Qué significado tiene la diferencia entre los dos valores obtenidos?

**27.** La carga y descarga de un componente electrónico está descrita por el proceso:

$$X(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le B, \\ Be^{-(t-B)}, & t > B. \end{cases}$$

donde $B$ es una variable aleatoria exponencial de valor medio 1.

**a)** Calculad la función de valor medio, $m(t)$, del proceso $X(t)$.

**b)** Dibujad un par de realizaciones de $X(t)$ y la función $m(t)$. ¿Qué similitudes y diferencias encontráis entre $m(t)$ y las realizaciones?

**c)** Calculad el valor máximo de $m(t)$. Comparadlo con el valor medio del máximo de las realizaciones (calculad el valor máximo de $X(t)$ y haced la esperanza del resultado). ¿Valen lo mismo? ¿Por qué?

**28.** Un tipo de partícula produce radiación de intensidad descrita por el proceso estocástico:

$$X(t) = J \cos t + (1 - J) \sin t,$$

donde $t$ es el tiempo y $J$ es una variable aleatoria de Bernoulli con parámetro $p = \frac{1}{2}$.

**a)** Calculad la función de valor medio $m(t)$ y la función de autocorrelación $R(t_1, t_2)$ del proceso $X(t)$.

**b)** En el estado coherente tenemos dos partículas produciendo radiación de manera independiente. Calculad la potencia total radiada.

**c)** En un estado supercoherente, las partículas anteriores dejan de ser independientes y tienen todas el mismo valor de la variable $J$. ¿Cuál es ahora la potencia total radiada?

**d)** La energía radiada en un periodo es $U = \int_0^{2\pi} \text{Pot}(t)dt$. Comparadla en los dos casos anteriores.

**e)** Generalizad a $N$ partículas los tres apartados anteriores. Demostrad que:

$$\frac{U_{\text{supercoherente}}}{U_{\text{coherente}}} = \frac{2}{1 + N^{-1}}.$$

(Indicación: observad que las variables de Bernoulli verifican $J^2 = J$.)

**29.**

**a)** Demostrad que si un proceso tiene la forma $X(t) = e^{-At}$ donde $A$ es una variable aleatoria, se puede expresar $R(t_1, t_2)$ a partir de $m(t)$. Es decir, habiendo calculado $m(t)$ ya podemos determinar $R(t_1, t_2)$ sin cálculos adicionales.

**b)** Una variable aleatoria de Simpson es la que toma valores en el intervalo $[0, 2]$ con función de densidad:

$$f_A(a) = \begin{cases} a, & 0 \le a < 1, \\ 2 - a, & 1 \le a \le 2. \end{cases}$$

Calculad las funciones de valor medio, de autocorrelación y de autocovarianza del proceso $X(t) = e^{-At}$.

**c)** ¿Qué valores puede adquirir la variable $X(1)$? Es $X(t)$ un proceso de estado discreto o continuo.

**d)** Utilizando los parámetros del apartado *b*, calculad la esperanza y la varianza de la variable $X(1)$.

**e)** La variable de Simpson se obtiene haciendo $A = U_1 + U_2$ donde $U_1$ y $U_2$ son variables uniformes en $[0, 1]$, independientes. Utilizad este hecho para deducir de manera más simple $m(t)$.

(Indicación: utilizad el resultado del apartado *a* en el *b*.)

**30.** El nivel de carga en un acumulador de energía, para $t \geq 0$, se describe con el proceso:

$$X(t) = A^2 - B^2 t + t^2,$$

donde $A$ y $B$ son variables uniformes en $[1, 2]$, independientes.

**a)** Calculad la función de valor medio del proceso $X(t)$.

**b)** ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia entre la carga inicial y la carga mínima sea superior a 3?

**c)** Calculad el coeficiente de correlación $\rho$ entre la carga inicial, $X(0)$, y la carga en $t = 1$, $X(1)$.

(Indicación: en el apartado *c* haced el cálculo expresando las variables en función de $A$ y $B$.)

**31.** El uso de ancho de banda de cierta conexión corresponde al proceso:

$$X(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq V, \\ e^{-(t-V)}, & t > V, \end{cases}$$

donde $V$ es una variable aleatoria con densidad $f_V(v) = ve^{-v}, v \geq 0$.

**a)** Calculad la función de valor medio, $m(t)$, del proceso $X(t)$.

**b)** Dibujad un par de realizaciones de $X(t)$ y la función $m(t)$. ¿Qué similitudes y diferencias encontráis entre $m(t)$ y las realizaciones?

**c)** Calculad, en función de $t$, $P(X(t) = 1)$.

**d)** ¿Qué valores puede adquirir $X(1)$? A partir de esto y del apartado anterior, ¿qué podemos decir sobre si el proceso es de estado continuo o discreto?

## Solucionario

**1.** Teníamos que $A$ es uniforme en el intervalo $[0,1]$. Recordemos que su función de distribución vale $F_A(a) = a, 0 \leq a \leq 1$.

Fijado $t > 0$, dado que $A$ varía entre 0 y 1, $X(t) = At$ varía entre 0 y $t$. Ahora podemos calcular:

$$F(x;\ t) = P(X(t) \leq x) = P(At \leq x) = P\left(A \leq \frac{x}{t}\right) = F_A\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}.$$

La función de densidad de primer orden se obtiene derivando la función anterior:

$$f(x;\ t) = \frac{d}{dx}F(x;\ t) = \frac{1}{t}, \qquad 0 \leq x \leq t.$$

Dado que esta densidad no depende de $x$, tenemos que con $t$ fijado la densidad de $X(t)$ es constante. Por tanto, $X(t)$ es una variable uniforme en el intervalo $[0,t]$.

**2. a)** A partir de la densidad de primer orden:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\ t)\,dx = \int_0^t \frac{x}{t}\,dx = \frac{1}{t}\int_0^t x\,dx = \frac{1}{t}\frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

A partir del teorema de la esperanza:

$$m(t) = \mathrm{E}(At) = tE(A) = t\frac{1}{2}.$$

Observad que en el cálculo anterior $t$ es una constante y, por tanto, sale multiplicando la esperanza. Igualmente no ha sido necesario calcular la integral, ya que sabemos que la esperanza de una uniforme vale el punto medio del intervalo. Entonces, $\mathrm{E}(A) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

**b)** Autocorrelación:

$$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}(At_1At_2) = t_1t_2E(A^2) = t_1t_2\int_0^1 a^2 \cdot 1da = \frac{t_1t_2}{3}.$$

Autocovarianza: $C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = \frac{t_1t_2}{3} - \frac{t_1}{2}\cdot\frac{t_2}{2} = \frac{t_1t_2}{12}$.

Potencia: $\mathrm{Pot}(t) = R(t,t) = \frac{t^2}{3}$.

**c)** $\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{E}(X(3)-X(2)) = \mathrm{E}(X(3)) - \mathrm{E}(X(2)) = m(3)-m(2) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, $\mathrm{E}(X(1)X(2)) = R(1,2) = \frac{2}{3}$, $\mathrm{E}(X(3)^2) = R(3,3) = 3$.

**3.** $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = \mathrm{E}(X(t)X(t)) - \mathrm{E}(X(t))\,\mathrm{E}(X(t)) = R(t,t) - m(t)m(t) = C(t,t)$.

**a)** Utilizando $C(t_1,t_2) = \frac{t_1t_2}{12}$: $\mathrm{Var}(X(2)) = C(2,2) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{Var}(X(3)) = C(3,3) = \frac{3}{4}$.

**b)** $\mathrm{Cov}(X(2),X(3)) = C(2,3) = \dfrac{1}{2}$.

**c)** $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X(2),X(3))}{\sigma_{X(2)}\ \sigma_{X(3)}}$. Dado que $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$: $\rho = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{3}{4}}} = 1$.

Resulta que la correlación es máxima. Esto se debe al hecho de que $X(2) = 2A$ y $X(3) = 3A$. Entonces, una variable determina exactamente a la otra, de manera lineal, ya que $X(3) = \frac{3}{2}X(2)$.

**4.** Según el enunciado: $\mathrm{E}(B_1) = \mathrm{E}(B_2) = \mathrm{E}(B_3) = 0$. $\mathrm{E}(B_1^2) = \mathrm{Var}(B_1) + \mathrm{E}(B_1)^2 = 1$. Igualmente, $\mathrm{E}(B_2^2) = \mathrm{E}(B_3^2) = 1$. Dado que son independientes, $\mathrm{E}(B_1 B_2) = \mathrm{E}(B_1)\,\mathrm{E}(B_2) = 0$. Igualmente, $\mathrm{E}(B_2 B_3) = \mathrm{E}(B_1 B_3) = 0$.

$$m(t) = \mathrm{E}[Y(t)] = \mathrm{E}(B_1 + B_2 \cos t + B_3 \sin t) = \mathrm{E}(B_1) + \mathrm{E}(B_2)\cos t + \mathrm{E}(B_3)\sin t = 0.$$

$$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[Y(t_1)Y(t_2)] = \mathrm{E}[(B_1 + B_2 \cos t_1 + B_3 \sin t_1)(B_1 + B_2 \cos t_2 + B_3 \sin t_2)]$$

$$= \mathrm{E}(B_1^2) + \mathrm{E}(B_1 B_2)\cos t_2 + \mathrm{E}(B_1 B_3)\sin t_2 + \mathrm{E}(B_2 B_1)\cos t_1 + \mathrm{E}(B_2^2)\cos t_1 \cos t_2$$

$$+ \mathrm{E}(B_2 B_3)\cos t_1 \sin t_2 + \mathrm{E}(B_3 B_1)\sin t_1 + \mathrm{E}(B_3 B_2)\sin t_1 \cos t_2 + \mathrm{E}(B_3^2)\sin t_1 \sin t_2$$

$$= 1 + \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2 = 1 + \cos(t_2 - t_1).$$

Por tanto, $m(t) = 0$ y $R(t_1, t_2) = 1 + \cos(t_2 - t_1)$.

**5.**

$$X(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < B \\ B, & t \ge B \end{cases}$$

donde $B$ es una variable uniforme en $[0, 2]$.

Las realizaciones tienen la misma forma que en el ejemplo (figura 4). Lo que varía es la frecuencia de aparición de los diferentes valores de $B$. De hecho, antes se podía dar cualquier $B$ positivo, mientras que ahora está limitado entre 0 y 2.

Función de valor medio del proceso $X(t)$

Debemos calcular $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$. Dado que $X(t)$ depende de una variable $B$, utilizaremos el teorema de la esperanza. La función de densidad de $B$ es $f_B(b) = \frac{1}{2}, 0 \le b \le 2$. En la definición de $X(t)$ vemos que $X(t) = B$ si $0 \le B \le t$, mientras que $X(t) = t$ si $B \ge t$. Así separaremos la integración sobre $b$ según estos dos casos:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_B(b)\, db = \int_0^t b \frac{1}{2} db + \int_t^2 t \frac{1}{2} db$$

$$= \left. \frac{b^2}{4} \right|_0^t + \left. \frac{bt}{2} \right|_t^2 = \frac{t^2}{4} + \frac{(2-t)t}{2} = t - \frac{t^2}{4}.$$

Pero el segundo caso no se puede dar cuando $t \ge 2$. Para estos valores de $t$:

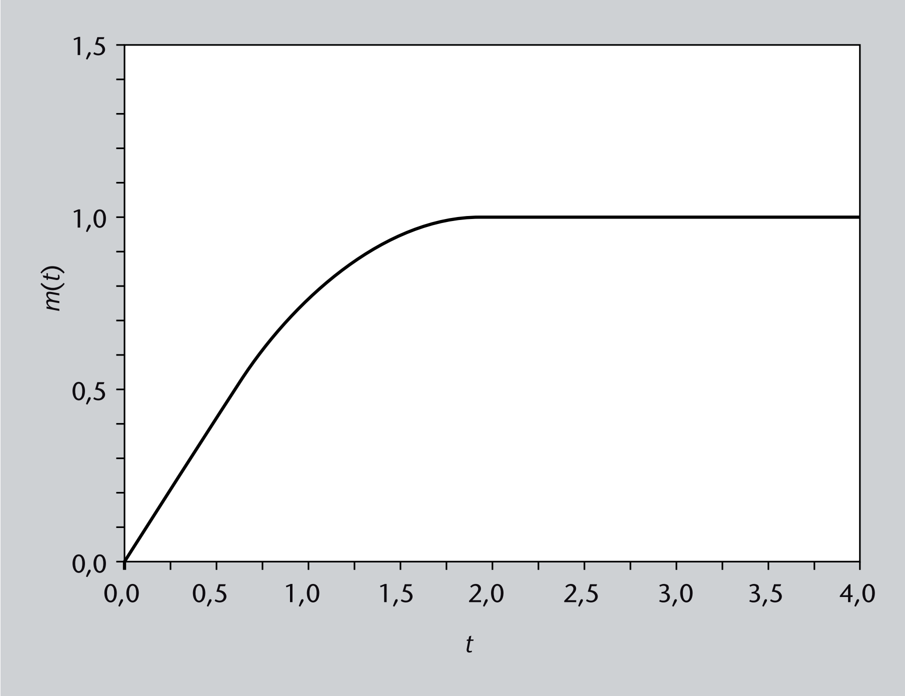
$$m(t) = \int_0^2 b \frac{1}{2} db = \left. \frac{b^2}{4} \right|_0^2 = 1.$$

Así,

$$m(t) = \begin{cases} t - \dfrac{t^2}{4}, & 0 \le t < 2 \\ 1, & t \ge 2 \end{cases}$$

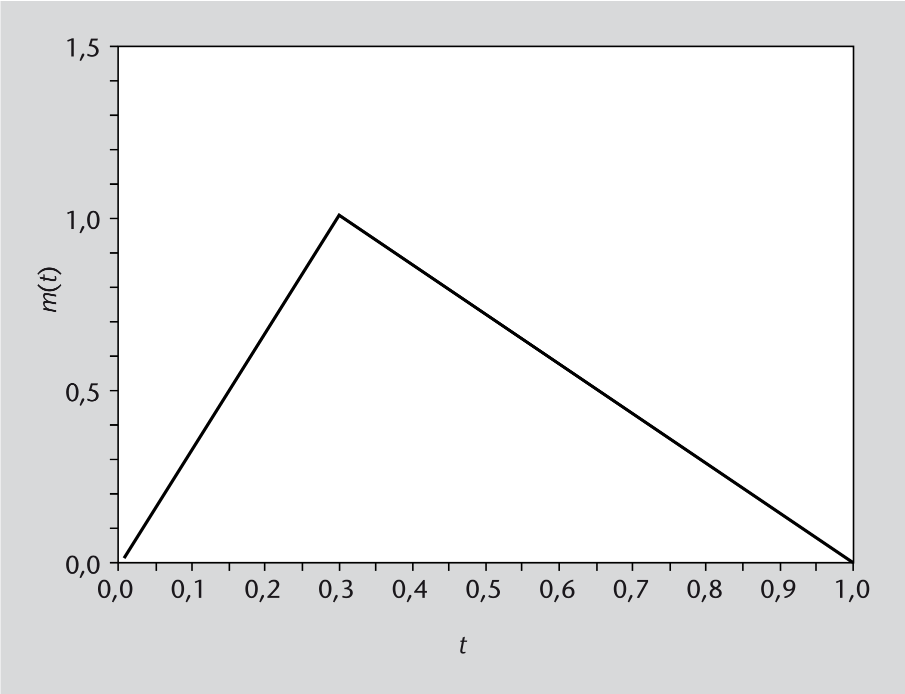
La función $m(t)$ se muestra en la figura 6.

Figura 6. Valor medio de $X(t)$




**6.** Las realizaciones tienen forma de triángulo, tal como se ve en la figura 7.

Figura 7. Realización de $X(t)$. ($A = 0{,}3$)



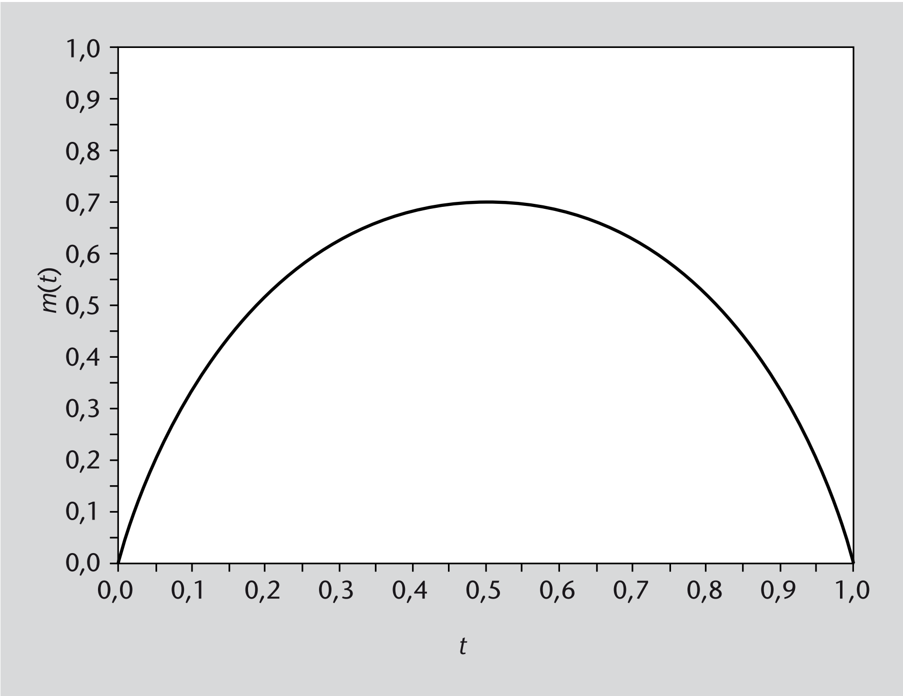

Para calcular la función de valor medio del proceso $X(t)$ utilizaremos el teorema de la esperanza. La función de densidad de $A$ es $f_A(a) = 1{,}0 \leq a \leq 1$. En la definición de $X(t)$ vemos que $X(t) = \frac{1-t}{1-A}$ si $0 \leq A \leq t$, mientras que $X(t) = \frac{t}{A}$ si $t < A \leq 1$. Así separaremos la integración sobre $a$ según estos dos casos:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_A(a)\, da = \int_0^t \frac{1-t}{1-a} da + \int_t^1 \frac{t}{a} da$$

$$= -(1-t)\ln(1-a)|_0^t + t \ln a|_t^1 = -(1-t)\ln(1-t) - t\ln t.$$

La función $m(t)$ se muestra en la figura 8. Observad que mientras que las realizaciones tienen un punto donde no son derivables (un "pincho"), la función de valor medio es "suave". Muchas veces las irregularidades de las realizaciones se suavizan al hacer la media.

Figura 8. Valor medio de $X(t)$




**7. a)** $\mathrm{E}(A) = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0$. $\mathrm{E}(B) = \dfrac{0+2}{2} = 1$.

Densidades: $f_A(a) = \dfrac{1}{2}, -1 \leq a \leq 1$. $f_B(b) = \dfrac{1}{2}, 0 \leq b \leq 2$.

$\mathrm{E}(A^2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} a^2 \frac{1}{2} da = \left[\frac{a^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$. $\mathrm{E}(B^2) = \displaystyle\int_0^2 b^2 \frac{1}{2} db = \left[\frac{b^3}{6}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$.

Como son independientes, $\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = 0 \cdot 1 = 0$.

**b)** $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(At + B) = \mathrm{E}(A)t + \mathrm{E}(B) = 0 \cdot t + 1 = 1$.

**c)** $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}[(At_1 + B)(At_2 + B)] = \mathrm{E}(A^2 t_1 t_2 + AB(t_1 + t_2) + B^2)$
$= \mathrm{E}(A^2) t_1 t_2 + \mathrm{E}(AB)(t_1 + t_2) + \mathrm{E}(B^2) = \dfrac{1}{3} t_1 t_2 + 0 \cdot (t_1 + t_2) + \dfrac{4}{3} = \dfrac{t_1 t_2 + 4}{3}$.

$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = \dfrac{t_1 t_2 + 4}{3} - 1 \cdot 1 = \dfrac{t_1 t_2 + 1}{3}$.

$\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = R(t,t) = \dfrac{t^2 + 4}{3}$.

**d)** Dado que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t)$ y $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1, t_2)$:

$\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 1, \mathrm{E}(X(2)) = m(2) = 1, \mathrm{Var}(X(1)) = C(1,1) = \dfrac{2}{3}$,
$\mathrm{Var}(X(2)) = C(2,2) = \dfrac{5}{3}, \mathrm{Cov}(X(1), X(2)) = C(1,2) = 1$,
$\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X(1), X(2))}{\sigma_{X(1)}\sigma_{X(2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{5}{3}}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}9487.$

**8.**

**a)** $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_A(a) da.$

La variable exponencial $A$ tiene parámetro $\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}(A)} = 1$ y entonces la densidad vale $f_A(a) = e^{-a}, a \geq 0$.

También tenemos que $X(t) = 0$ si $A < t$ y $X(t) = t$ si $A \geq t$. Entonces:

$$m(t) = \int_0^t 0 \cdot e^{-a} da + \int_t^{\infty} t \cdot e^{-a} da = t \int_t^{\infty} e^{-a} da = t \left[\frac{e^{-a}}{-1}\right]_t^{\infty} = te^{-t}.$$

**b)** $X(t)$ solo puede tomar dos valores: 0 y $t$. Su función de probabilidad de primer orden vale:

$$P(x = 0;\ t) = P(X(t) = 0) = P(A < t) = \int_0^t e^{-a} da = 1 - e^{-t}.$$

$$P(x = t;\ t) = P(X(t) = t) = P(A \geq t) = \int_t^{\infty} e^{-a} da = e^{-t}.$$

(Observad que las dos probabilidades están entre 0 y 1 y su suma vale 1.)

**c)** $m(t) = \displaystyle\sum_k x_k P(x_k;\ t) = 0 \cdot P(x = 0;\ t) + t \cdot P(x = t;\ t) = 0 \cdot (1 - e^{-t}) + t \cdot e^{-t} = te^{-t}.$

**9. a)** $\mathrm{E}(U) = \displaystyle\int_0^2 u \cdot \frac{u}{2} db = \left[\frac{u^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$. $\mathrm{E}(U^2) = \displaystyle\int_0^2 u^2 \cdot \frac{u}{2} db = \left[\frac{u^4}{8}\right]_0^2 = 2$. $\mathrm{E}(V) = \displaystyle\int_{-1}^1 v \cdot \frac{7}{2} v^6 db = \left.\frac{7v^8}{16}\right|_{-1}^1 = 0$. $\mathrm{E}(V^2) = \displaystyle\int_{-1}^1 v^2 \cdot \frac{7}{2} v^6 db = \left.\frac{7v^9}{18}\right|_{-1}^1 = \frac{7}{9}$.

Como son independientes, $\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V) = 0$.

**b)** $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(U + V \sin t) = \mathrm{E}(U) + \mathrm{E}(V) \sin t = \frac{4}{3} + 0 \cdot \sin t = \frac{4}{3}$.

$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = \mathrm{E}((U + V \sin t_1)(U + V \sin t_2)) = \mathrm{E}(U^2 + UV(\sin t_1 + \sin t_2) + V^2 \sin t_1 \sin t_2) = \mathrm{E}(U^2) + \mathrm{E}(UV)(\sin t_1 + \sin t_2) + \mathrm{E}(V^2) \sin t_1 \sin t_2 = 2 + \dfrac{7}{9} \sin t_1 \sin t_2$.

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = 2 + \frac{7}{9} \sin t_1 \sin t_2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{9}(2 + 7 \sin t_1 \sin t_2).$$

**c)** $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = R(t, t) = 2 + \dfrac{7}{9} \sin^2 t.$

Es máxima cuando $\sin t = \pm 1$, es decir, cuando $t = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ con $k$ entero.

**d)** Considerando que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t, t) - m(t)^2 = C(t, t)$ y $\mathrm{Cov}(X(t_1)X(t_2)) = C(t_1, t_2)$:

$\mathrm{Var}\left(X\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = C\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5}{12}, \mathrm{Var}\left(X\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$,
$\mathrm{Cov}\left(X\left(\frac{\pi}{6}\right), X\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = C\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{11}{18}$,
$\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X(\frac{\pi}{6}), X(\frac{\pi}{2}))}{\sigma_{X(\frac{\pi}{6})}\sigma_{X(\frac{\pi}{2})}} = \dfrac{\frac{11}{18}}{\sqrt{\frac{5}{12}}\sqrt{1}} = \dfrac{11}{\sqrt{135}} = 0{,}9467.$

**10. a)** $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_B(b)\, db.$

La variable uniforme $B$ tiene densidad $f_B(b) = 1/2, 0 \leq b \leq 2$.

También tenemos que $X(t) = 0$ si $B \geq t$ y $X(t) = 2 - t$ si $B < t$. Entonces:

Para $0 \leq t < 2$:

$$m(t) = \int_0^t (2-t) \cdot \frac{1}{2} db + \int_t^2 0 \cdot \frac{1}{2} db = (2-t) \int_0^t \frac{1}{2} db = (2-t) \left[\frac{b}{2}\right]_0^t = t - \frac{t^2}{2}.$$

Para $t \geq 2$, cualquier valor de $B$ da $X(t) = 2 - t$. Entonces:

$m(t) = 2 - t.$

**b)** $m(t) = \mathrm{E}(Y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) f_A(a)\, da.$

La variable exponencial $A$ tiene parámetro $\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}(A)} = 1$ y entonces la densidad vale $f_A(a) = e^{-a}, a \geq 0$.

También tenemos que $Y(t) = t - A$ si $A < t$ y $Y(t) = A - t$ si $A \geq t$. Entonces:

$$m(t) = \int_0^t (t-a) \cdot e^{-a} da + \int_t^{\infty} (a-t) \cdot e^{-a} da = (a-t+1)e^{-a}|_0^t - (a-t+1)e^{-a}|_t^{\infty} = 2e^{-t} + t - 1.$$

**11. a)** $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = \frac{1}{\lambda} = 1$. $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{E}(A)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + 1 = 2$. $\mathrm{E}(B^2) = 2$. Como son independientes, $\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = 1$.

**b)** $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(Ae^t + B) = \mathrm{E}(A)e^t + \mathrm{E}(B) = e^t + 1.$

$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}[(Ae^{t_1} + B)(Ae^{t_1} + B)] = \mathrm{E}(A^2 e^{t_1+t_2} + AB(e^{t_1} + e^{t_2}) + B^2) = \mathrm{E}(A^2)e^{t_1+t_2} + \mathrm{E}(AB)(e^{t_1} + e^{t_2}) + \mathrm{E}(B^2) = 2e^{t_1+t_2} + e^{t_1} + e^{t_2} + 2.$

$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = 2e^{t_1+t_2} + e^{t_1} + e^{t_2} + 2 - (e^{t_1} + 1)(e^{t_2} + 1) = e^{t_1+t_2} + 1.$

**c)** $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = R(t, t) = 2e^{2t} + 2e^t + 2.$

$\mathrm{Pot}(t) = 26 \Rightarrow 2e^{2t} + 2e^t + 2 = 26 \Rightarrow e^{2t} + e^t - 12 = 0.$

Denominando $z = e^t$ nos queda la ecuación de segundo grado $z^2 + z - 12 = 0$, que tiene las soluciones $z = 3$ y $z = -4$. Dado que $e^t$ debe ser positivo, tenemos finalmente que $t = \ln 3 = 1{,}098$.

**d)** Dado que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t, t) - m(t)^2 = C(t, t)$ y $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1, t_2)$:

$\mathrm{E}(X(0)) = m(0) = 2, \mathrm{E}(X(\ln 2)) = m(\ln 2) = 3.$

$\mathrm{Var}(X(0)) = C(0, 0) = 2, \mathrm{Var}(X(\ln 2)) = C(\ln 2, \ln 2) = 5.$

$\mathrm{Cov}(X(0), X(\ln 2)) = C(0, \ln 2) = 3, \rho = \frac{\mathrm{Cov}(X(0), X(\ln 2))}{\sigma_{X(0)}\sigma_{X(\ln 2)}} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}9486.$

**12.** $m_Y(t) = \mathrm{E}(Y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) f_V(v) dv.$

Ahora tenemos que $Y(t) = t^2 + t$ si $V \geq t$ e $Y(t) = 0$ si $V < t$. Entonces:

$$m_Y(t) = \int_0^t 0 \cdot \frac{1}{(v+1)^2} dv + \int_t^{\infty} (t^2 + t) \cdot \frac{1}{(v+1)^2} dv = (t^2 + t) \int_t^{\infty} \frac{1}{(v+1)^2} dv = (2-t) \left[-\frac{1}{v+1}\right]_t^{\infty} = \frac{t^2 + t}{t+1} = t.$$

De la misma manera, $Z(t) = 0$ si $V \geq t$ y $Z(t) = V + 1$ si $V < t$. Entonces:

$$m_Z(t) = \int_0^t (v+1) \cdot \frac{1}{(v+1)^2} dv + \int_t^\infty 0 \cdot \frac{1}{(v+1)^2} dv = \int_0^t \frac{1}{v+1} dv = \ln(t+1).$$

**13. a)** $\mathrm{E}(A) = \frac{0+6}{2} = 3$, $\mathrm{E}(A^2) = \int_0^6 a^2 \frac{1}{6} da = 12$.

$$m(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}(t^2 - 3At + 2A^2) = t^2 - 3tE(A) + 2E(A^2) = t^2 - 9t + 24.$$

**b)** $\mathrm{E}[X(0)] = m(0) = 24$. Como $X(0) = 2A^2$, $\mathrm{E}(X(0)^2) = 4E(A^4) = 4\int_0^6 a^4 \frac{1}{6} da = \frac{5{,}184}{5}$. Entonces,

$$\mathrm{Var}[X(0)] = \mathrm{E}[X(0)^2] - \mathrm{E}[X(0)]^2 = \frac{2{,}304}{5} = 460{,}8.$$

**c)** Calculamos primero $M$ en función de $A$: $\frac{dX(t)}{dt} = 2t - 3A$, y entonces el mínimo se da en $t_m = \frac{3A}{2}$. Así, $M = X(t_m) = -\frac{A^2}{4}$.

$$P(M > -1) = P\left(-\frac{A^2}{4} > -1\right) = P(0 < A < 2) = \frac{1}{3}.$$

**14. a)** Observamos que $\mathrm{E}(A) = \frac{1}{\lambda} = 1$, $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{E}(A)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + 1^2 = 2$. La densidad de $B$ vale $f_B(b) = e^{-b}$ para $b \geq 0$.

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(Ae^{-Bt}) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(e^{-Bt}) = 1 \cdot \int_0^\infty e^{-bt} e^{-b} db = \frac{1}{1+t}.$$

$$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}(Ae^{-Bt_1} Ae^{-Bt_2}) = \mathrm{E}(A^2 e^{-B(t_1+t_2)})$$

$$= \mathrm{E}(A^2)\,\mathrm{E}(e^{-B(t_1+t_2)}) = \frac{2}{1+t_1+t_2}.$$

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = \frac{2}{1+t_1+t_2} - \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}.$$

**b)** Dado que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t)$ y $\mathrm{Cov}[X(t_1), X(t_2)] = C(t_1, t_2)$:

$$\mathrm{E}(X(0)) = m(0) = 1, \qquad \mathrm{E}(X(1)) = m(1) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{Var}(X(0)) = C(0,0) = 1, \qquad \mathrm{Var}(X(1)) = C(1,1) = \frac{5}{12}.$$

$$\mathrm{Cov}(X(0), X(1)) = C(0,1) = \frac{1}{2}.$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X(0), X(1))}{\sigma_{X(0)}\sigma_{X(1)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1}\sqrt{\frac{5}{12}}} = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}7745.$$

**15.** $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_V(v)\, dv.$

Ahora tenemos que $X(t) = t^2 - Vt$ si $V \geq t$ y $X(t) = t^2 - (V+1)t + V$ si $V < t$. Entonces:

$$m(t) = \int_0^t (t^2 - (v+1)t + v) \cdot 1\, dv + \int_t^1 (t^2 - vt) \cdot 1\, dv$$

$$= \left[t^2 v - \left(\frac{v^2}{2} + v\right) t + \frac{v^2}{2}\right]_0^t + \left[t^2 v - \frac{v^2}{2} t)\right]_t^1 = \frac{t^2 - t}{2}.$$

**16. a)** Veamos cuál es la función de autocorrelación.

$$R_Z(t_1, t_2) = \mathrm{E}(Z(t_1) Z(t_2)) = \mathrm{E}((X(t_1) + N(t_1))(X(t_2) + N(t_2)))$$

$$= \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2) + X(t_1)N(t_2) + N(t_1)X(t_2) + N(t_1)N(t_2))$$

$$= \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) + \mathrm{E}(X(t_1)N(t_2)) + \mathrm{E}(N(t_1)X(t_2)) + \mathrm{E}(N(t_1)N(t_2))$$

$$= \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) + \mathrm{E}(X(t_1))\,\mathrm{E}(N(t_2)) + \mathrm{E}(N(t_1))\,\mathrm{E}(X(t_2)) + \mathrm{E}(N(t_1)N(t_2))$$

$$= R_X(t_1, t_2) + R_N(t_1, t_2).$$

**b)** $\mathrm{Pot}_Z(t) = R_Z(t,t) = R_X(t,t) + R_N(t,t) = \mathrm{Pot}_X(t) + \mathrm{Pot}_N(t)$. $\mathrm{Pot}_X(t) = 2$ y

$$\mathrm{Pot}_N(t) = \mathrm{E}(N(t)^2) = \int_0^{\pi} \sin^2(t-b) \frac{1}{\pi} db = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2(t-b))}{2} \frac{1}{\pi} db = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, $\mathrm{Pot}_Z(t) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

**17.**

**a)** Calculemos primero $\mathrm{E}(A) = \frac{-3+3}{2} = 0$. Entonces:

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}((1 + A\cos(10\pi t))e^{-t}) = e^{-t} + e^{-t}\cos(10\pi t)\,\mathrm{E}(A) = e^{-t}.$$

**b)** $\mathrm{E}(X(\frac{1}{2})) = m(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}$. Veamos también que $\mathrm{E}(A^2) = V(A^2) = \frac{(3-(-3))^2}{12} = 3$. Como $X(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}(1-A)$, $\mathrm{E}(X(\frac{1}{2})^2) = e^{-1}\,\mathrm{E}(1 - 2A + A^2) = e^{-1}(1 - 2\cdot 0 + 3) = 4e^{-1}$. Entonces:

$$\mathrm{Var}(X(0)) = \mathrm{E}(X(0)^2) - \mathrm{E}(X(0))^2 = 4e^{-1} - e^{-1} = 3e^{-1} = 0{,}367.$$

**c)** Para que $X(t)$ no se haga nunca negativo es necesario que $|A| \leq 1$. Así, la probabilidad que nos piden es:

$$P(-1 \leq A \leq 1) = \frac{1}{3}.$$

**18. a**) Observemos que $\mathrm{E}(A) = 1$, $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{E}(A)^2 = 1 + 1^2 = 2$, $\mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{E}(B^2) = \mathrm{Var}(B) + \mathrm{E}(B)^2 = 1$ y $\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = 0$. Con estos datos podemos calcular:

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}\left(A + \frac{B}{1+t}\right) = \mathrm{E}(A) + \frac{\mathrm{E}(B)}{1+t} = 1.$$

$$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}\left(\left(A + \frac{B}{1+t_1}\right)\left(A + \frac{B}{1+t_2}\right)\right) =$$

$$\mathrm{E}(A^2) + \mathrm{E}(AB)\left(\frac{1}{1+t_1} + \frac{1}{1+t_2}\right) + \frac{\mathrm{E}(B^2)}{(1+t_1)(1+t_2)} = 2 + \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}.$$

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = 2 + \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)} - 1\cdot 1 = 1 + \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}.$$

**b)** Dado que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t)$ y $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1,t_2)$:

$$\mathrm{E}(X(0)) = m(0) = 1, \qquad \mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 1.$$

$$\mathrm{Var}(X(0)) = C(0,0) = 2, \qquad \mathrm{Var}(X(1)) = C(1,1) = \frac{5}{4}.$$

$$\mathrm{Cov}(X(0), X(1)) = C(0,1) = \frac{3}{2}.$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X(0), X(1))}{\sigma_{X(0)}\sigma_{X(1)}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}9486.$$

**19.** $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_Z(z)\,dz.$

Ahora tenemos que $X(t) = \frac{Z+1}{t+1}$ si $Z < t$ y $X(t) = 1$ si $Z \geq t$. Entonces, si $1 < t < 2$:

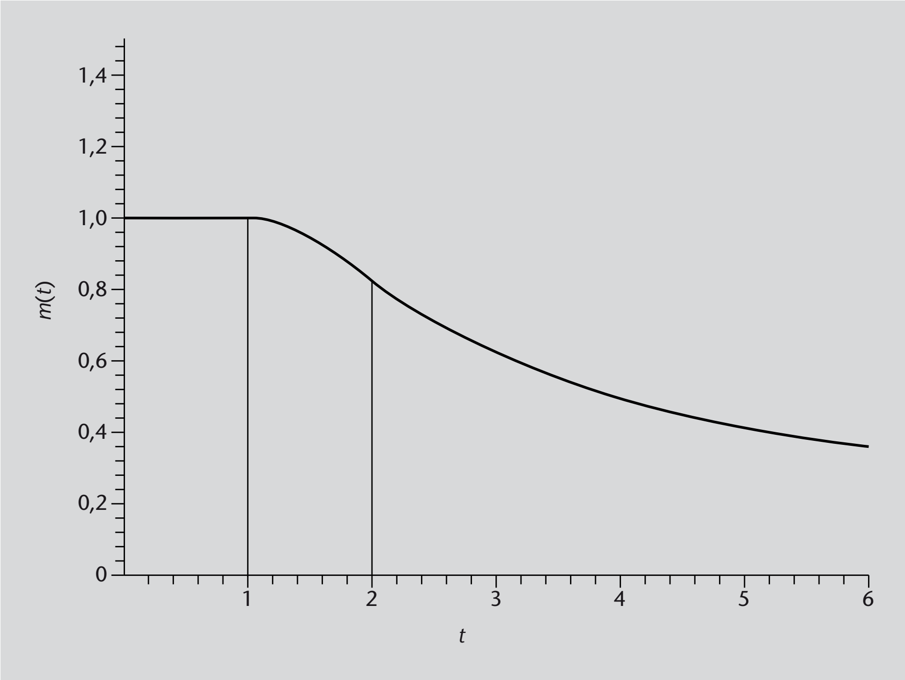
$$m(t) = \int_1^t \frac{z+1}{t+1}\cdot 1\,dz + \int_t^2 1\cdot 1\,dz = \left.\frac{z^2+2z}{2(t+1)}\right|_1^t + z|_t^2 = \frac{1+4t-t^2}{2(t+1)}.$$

Si $t > 2$:

$$m(t) = \int_1^2 \frac{z+1}{t+1}\cdot 1\,dz = \left.\frac{z^2+2z}{2(t+1)}\right|_1^2 = \frac{5}{2(t+1)}.$$

Ved la figura 9.

Figura 9. $m(t)$




**20. a)** Tenemos $\mathrm{E}(X(t)) = 10$, $\mathrm{E}(X(t)^2) = 150$, $\mathrm{E}(Q(t)) = 2$ y $\mathrm{E}(Q(t)^2) = 6$. Entonces:

$$\mathrm{Pot}_Y(t) = \mathrm{E}(Y(t)^2) = \mathrm{E}[(X(t) + Q(t))^2] = \mathrm{E}[X(t)^2 + 2X(t)Q(t) + Q(t)^2] =$$

$$\mathrm{E}(X(t)^2) + 2\,\mathrm{E}(X(t))\,\mathrm{E}(Q(t)) + \mathrm{E}(Q(t)^2) = 150 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + 6 = 196.$$

**b)** $\mathrm{E}(Z(t)) = aE(Y(t)) = a(\mathrm{E}(X(t)) + \mathrm{E}(Q(t))) = 12a$ y $\mathrm{Pot}_Z(t) = \mathrm{E}(Z(t)^2) = 196a^2$. Debe ser, por lo tanto, $a = \dfrac{10}{12}$ y $\mathrm{Pot}_Z(t) = 136{,}1$.

**21. a)** Calculemos primero $\mathrm{E}(B) = \frac{1+3}{2} = 2$. Entonces:

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}[100 + Bt(24 - t)] = 100 + \mathrm{E}(B)t(24 - t) = 100 + 48t - 2t^2.$$

**b)** Es $X(3) = 100 + 63B$. Utilizando las propiedades de la varianza:

$$\mathrm{Var}(X(3)) = \mathrm{Var}(100 + 63B) = 63^2 Var(B) = 63^2 \frac{(3-1)^2}{12} = 1.323.$$

(Alternativamente, $\mathrm{E}(X(3)) = m(3) = 226$. Observemos también que $\mathrm{E}(B^2) = \int_1^3 b^2 \frac{1}{2} db = \frac{13}{3}$ y entonces $\mathrm{E}(X(3)^2) = \mathrm{E}(10.000 + 12.600B + 3.969B^2) = 52.399$. Entonces, $\mathrm{Var}(X(3)) = \mathrm{E}(X(3)^2) - \mathrm{E}(X(3))^2 = 52.399 - 226^2 = 1.323$.)

**c)** Para que $X(t)$ llegue a superar en algún momento el valor 500, es necesario que el máximo de la parábola, $X(12) = 100 + 144B$, sea superior a 500. Así, la probabilidad que nos piden es:

$$P(100 + 144B > 500) = P\left(B > \frac{25}{9}\right) = \frac{3 - \frac{25}{9}}{2} = \frac{1}{9}.$$

**22. a)** Observemos que $\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(V) = 0$, $\mathrm{E}(U^2) = \mathrm{E}(V^2) = \mathrm{Var}(V) + \mathrm{E}(V)^2 = 1^2 + 0^2 = 1$ y $\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V) = 0$. Con estos datos podemos calcular:

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(U \sin t + V \sin 2t) = \mathrm{E}(U) \sin t + \mathrm{E}(V) \sin 2t = 0.$$

$$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}[(U \sin t_1 + V \sin 2t_1)(U \sin t_2 + V \sin 2t_2)]$$

$$= \mathrm{E}(U^2) \sin t_1 \sin t_2 + \mathrm{E}(V^2) \sin 2t_1 \sin 2t_2 + \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V)(\sin t_1 \sin 2t_2 + \sin 2t_1 \sin t_2)$$

$$= \sin t_1 \sin t_2 + \sin 2t_1 \sin 2t_2$$

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = \sin t_1 \sin t_2 + \sin 2t_1 \sin 2t_2.$$

**b)** Dado que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t)$ y $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1, t_2)$:

$$\mathrm{E}\left(X\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = m\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = 0, \qquad \mathrm{E}\left(X\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = m\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\mathrm{Var}\left(X\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = C\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{3}{2}, \qquad \mathrm{Var}\left(X\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = C\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$\mathrm{Cov}\left(X\left(\tfrac{\pi}{3}\right), X\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = C\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X(\frac{\pi}{3}), X(\frac{\pi}{2}))}{\sigma_{X(\frac{\pi}{3})}\sigma_{X(\frac{\pi}{2})}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071.$$

**23.**

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_Z(z)\, dz.$$

Ahora tenemos que $X(t) = 0$ si $Z < t$ y $X(t) = \dfrac{1}{Z}$ si $Z \geq t$. Entonces:

$$m(t) = \int_0^t 0 \cdot \frac{z^2}{2} e^{-z} dz + \int_t^{\infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2}{2} e^{-z} dz = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} z e^{-z} dz = \frac{1}{2} \left[-(z+1)e^{-z}\right]_t^{\infty} = \frac{t+1}{2} e^{-t}.$$

**24.** Para el primer proceso: $\mathrm{Pot}(t) = R(t,t) = \sin^2 t + \sin^2 2t$.

Para el segundo proceso:

$$\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)^2 f_Z(z)\, dz = \int_t^{\infty} \frac{1}{z^2} \cdot \frac{z^2}{2} e^{-z}\, dz = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} e^{-z} dz = \frac{e^{-t}}{2}.$$

**25. a)** Calculemos primero:

$$\mathrm{E}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} a f_A(a)\, da = \int_0^2 a \frac{a}{2}\, da = \frac{4}{3}, \qquad \mathrm{E}\left(\frac{1}{A}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} f_A(a)\, da = \int_0^2 \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{2}\, da = 1.$$

Entonces,

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}\left(Ae^{-t} + \frac{1}{A}\right) = \mathrm{E}(A)e^{-t} + \mathrm{E}\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{4}{3}e^{-t} + 1.$$

**b)** A partir de la forma explícita de $X(t)$, $V = X(0) - X(1) = \left(A + \frac{1}{A}\right) - \left(Ae^{-1} + \frac{1}{A}\right) = A(1 - e^{-1})$. Utilizando las propiedades de la varianza:

$$\mathrm{Var}(V) = \mathrm{Var}(A(1 - e^{-1})) = (1 - e^{-1})^2 Var(A) = \frac{2}{9}(1 - e^{-1})^2 = 0{,}08879,$$

ya que $\mathrm{E}(A^2) = \int_0^2 a^2 \frac{a}{2} da = 2$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(A)^2 = \frac{2}{9}$.

**c)** La probabilidad que nos piden es:

$$P(X(2) > 2) = P\left(Ae^{-2} + \frac{1}{A} > 2\right) = P(e^{-2}A^2 - 2A + 1 > 0).$$

Los ceros del polinomio de segundo grado son $e^2 \pm \sqrt{e^4 - e^2}$, aproximadamente 14,26 y 0,52. El polinomio es positivo fuera del intervalo $[0{,}52, 14{,}26]$. Teniendo en cuenta que $A$ se encuentra entre 0 y 2:

$$\begin{aligned} P(X(2) > 2) = P(0 < A < e^2 - \sqrt{e^4 - e^2}) &= \int_0^{e^2 - \sqrt{e^4 - e^2}} \frac{a}{2} da \\ &= \frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^3}{2}\sqrt{e^2 - 1} = 0{,}0671. \end{aligned}$$

**26. a)** Observemos que $\mathrm{E}(R) = \frac{1+3}{2} = 2$, $\mathrm{E}(S) = \frac{-1+1}{2} = 0$, $\mathrm{Var}(R) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$, $\mathrm{Var}(S) = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{1}{3}$, $\mathrm{E}(R^2) = \mathrm{Var}(R) + \mathrm{E}(R)^2 = \frac{13}{3}$, $\mathrm{E}(S^2) = \mathrm{Var}(S) + \mathrm{E}(S)^2 = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{E}(RS) = \mathrm{E}(R)\,\mathrm{E}(S) = 0$. Con estos datos podemos calcular:

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(Rt + S\cos\pi t) = \mathrm{E}(R)t + \mathrm{E}(S)\cos\pi t = 2t.$$

$$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}[(Rt_1 + S\cos\pi t_1)(Rt_2 + S\cos\pi t_2)]$$

$$= \mathrm{E}(R^2)t_1t_2 + \mathrm{E}(S^2)\cos\pi t_1\cos\pi t_2 + \mathrm{E}(R)\,\mathrm{E}(S)(t_1\cos\pi t_2 + t_2\cos\pi t_1)$$

$$= \tfrac{13}{3}t_1t_2 + \tfrac{1}{3}\cos\pi t_1\cos\pi t_2.$$

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = \frac{1}{3}(t_1t_2 + \cos\pi t_1\cos\pi t_2).$$

**b)** Dado que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t)$ y $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1, t_2)$:

$$\mathrm{E}[X(0)] = m(0) = 0, \qquad \mathrm{E}[X(1)] = m(1) = 2.$$

$$\mathrm{Var}[X(0)] = C(0,0) = \frac{1}{3}, \qquad \mathrm{Var}[X(1)] = C(1,1) = \frac{2}{3}.$$

$$\mathrm{Cov}[X(0), X(1)] = C(0,1) = -\frac{1}{3}.$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}[X(0), X(1)]}{\sigma_{X(0)}\sigma_{X(1)}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0{,}7071.$$

**c)** Para el proceso completo, $\mathrm{Pot}(t) = R(t,t) = \frac{1}{3}(13t^2 + \cos^2 \pi t)$.

Para el proceso sin el término con $S$, $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = \mathrm{E}((Rt)^2) = \mathrm{E}(R^2)t^2 = \frac{13}{3}t^2$.

La diferencia es $\frac{1}{3}\cos^2 \pi t$, y corresponde a la potencia del término de corrección: $\mathrm{E}((S\cos \pi t)^2)$.

**27. a)** $m(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_B(b)\, db$.

Ahora tenemos que $X(t) = Be^{-(t-B)}$ si $B < t$ y $X(t) = t$ si $B \geq t$. Entonces:

$$m(t) = \int_0^t be^{-(t-b)} \cdot e^{-b} db + \int_t^{\infty} t \cdot e^{-b} db = e^{-t}\int_0^t b\, db + t\int_t^{\infty} e^{-b} db = \left(t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-t}.$$

**b)** $m(t)$ sigue el comportamiento de subida y bajada de las realizaciones, si bien la media estadística ha hecho desaparecer la irregularidad (pincho).

Figura 10. Realizaciones comparadas con $m(t)$

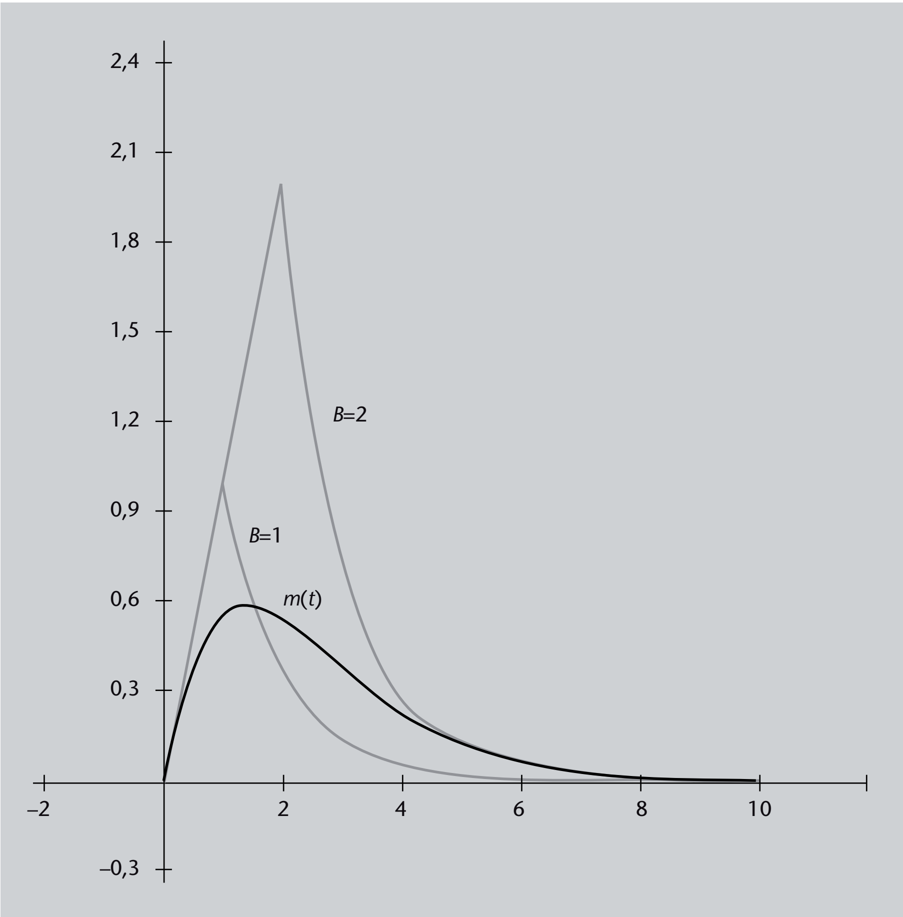



**Figura 10**

Realizaciones para $B = 1$ y $B = 2$ comparadas con $m(t)$.

**c)** Haciendo $\frac{dm(t)}{dt} = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) e^{-t} = 0$ encontramos el máximo $M$ de $m(t)$ en $t = \sqrt{2}$, que es $M = (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} = 0{,}587$. En cambio, el valor máximo de una realización vale $B$ (corresponde al pico) y el valor medio es 1.

En efecto, no coinciden, ya que uno es el máximo del valor medio y el otro el valor medio del máximo (por ejemplo, para cualquier variable, en general es diferente el valor medio del cuadrado que el cuadrado del valor medio).

**28. a)** Observemos que $\mathrm{E}(J) = p = \frac{1}{2}$. Entonces:

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(J\cos t + (1-J)\sin t)$$

$$= \mathrm{E}(J)\cos t + (1 - \mathrm{E}(J))\sin t = \tfrac{1}{2}(\cos t + \sin t).$$

$$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}[(J\cos t_1 + (1-J)\sin t_1)(J\cos t_2 + (1-J)\sin t_2)]$$

$$= \mathrm{E}[J^2 \cos t_1 \cos t_2 + (1-J)J(\sin t_1 + \cos t_2) + (1-J)^2 \sin t_1 \sin t_2)]$$

$$= \mathrm{E}[J\cos t_1 \cos t_2 + (1-J)\sin t_1 \sin t_2)] = \mathrm{E}(J)\cos t_1\cos t_2 + (1-\mathrm{E}[J])\sin t_1 \sin t_2$$

$$= \tfrac{1}{2}(\cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2) = \tfrac{1}{2}\cos(t_2 - t_1).$$

(Hemos utilizado $J^2 = J$, $(1-J)J = J - J^2 = 0$ y $(1-J)^2 = 1 - 2J + J^2 = 1 - J$.)

Alternativamente, se pueden calcular las esperanzas sumando sobre los valores de $J$ ($X(t) = \cos t$ o $X(t) = \sin t$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada valor). En este caso habría sido más directo hacerlo aí, pero el método utilizado es más general.

**b)** Representamos por $X_1(t)$ y $X_2(t)$ las intensidades radiadas para cada partícula. Son dos procesos con la misma distribución probabilística, independientes. La intensidad total es $Y_c(t) = X_1(t) + X_2(t)$. La potencia total es:

$$\mathrm{Pot}_{Y_c} = \mathrm{E}(Y_c(t)^2) = \mathrm{E}[(X_1(t) + X_2(t))^2]$$

$$= \mathrm{E}[X_1(t)^2 + X_2(t)^2 + 2X_1(t)X_2(t)] = \mathrm{Pot}_{X_1} + \mathrm{Pot}_{X_2} + 2m_{X_1}(t)m_{X_2}(t)$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{4}(\cos t + \sin t)^2$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}(1 + 2\cos t \sin t) = \tfrac{3}{2} + \cos t \sin t.$$

**c)** Ahora la intensidad total vale $Y_{sc}(t) = 2X(t)$. La potencia total es:

$$\mathrm{Pot}_{Y_{sc}} = \mathrm{E}(Y_{sc}(t)^2) = 4E(X(t)^2) = 4\mathrm{Pot}_X = 2.$$

**d)**

$$U_c = \int_0^{2\pi} \mathrm{Pot}_{Y_c}(t)dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \cos t \sin t\right) dt = 3\pi.$$

$$U_{sc} = \int_0^{2\pi} \mathrm{Pot}_{Y_{sc}}(t)dt = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi.$$

La energía en el estado supercoherente es $1,3$ veces superior.

**e)** Si tenemos $N$ partículas, $Y_{sc}(t) = NX(t)$, $\text{Pot}_{Y_{sc}} = N^2\text{Pot}_X = \frac{N^2}{2}$ y $U_{sc} = N^2\pi$.

En el estado coherente, $Y_c(t) = \sum_{i=1}^{N} X_i(t)$.

$$\text{Pot}_{Y_c} = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i(t)\right)^2\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i(t)^2 + 2\sum_{i<j} X_i(t)X_j(t)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \text{Pot}_{X_i} + 2\sum_{i<j} m_{X_i}(t)m_{X_i}(t) = N\frac{1}{2} + 2\binom{N}{2}\frac{1}{4}(\cos t + \sin t)^2$$

$$= \frac{N}{2} + \frac{N^2-N}{4}(1 + 2\cos t \sin t) = \frac{N^2+N}{4} + \frac{N^2-N}{2}\cos t \sin t.$$

$$U_c = \frac{N^2+N}{2}\pi.$$

$$\frac{U_{sc}}{U_c} = \frac{N^2\pi}{\frac{N^2+N}{2}\pi} = \frac{2}{1+N^{-1}}.$$

**29. a)** $R(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}(e^{-At_1}e^{-At_2}) = \mathrm{E}(e^{-A(t_1+t_2)}) = m(t_1+t_2)$.

**b)**

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} f_A(a)\,da = \int_0^1 e^{-at} a\,da + \int_1^2 e^{-at}(2-a)\,da$$

$$= \left[-\left(\frac{a}{t} + \frac{1}{t^2}\right)e^{-at}\right]_{a=0}^{a=1} - \left[\left(\frac{2-a}{t} - \frac{1}{t^2}\right)e^{-at}\right]_{a=1}^{a=2}$$

$$= \frac{1 - 2e^{-t} + e^{-2t}}{t^2} = \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^2.$$

Utilizando el resultado de $a$:

$$R(t_1,t_2) = \left(\frac{1-e^{-(t_1+t_2)}}{t_1+t_2}\right)^2.$$

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = \left(\frac{1-e^{-(t_1+t_2)}}{t_1+t_2}\right)^2 - \left(\frac{(1-e^{-t_1})(1-e^{-t_2})}{t_1t_2}\right)^2.$$

**c)** $X(1) = e^{-A}$ adquiere todos los valores dentro del intervalo $[e^{-2}, 1]$. El proceso es de estado continuo, ya que la variable resultante al fijar $t$ es continua.

**d)** Dado que $\mathrm{E}[X(t)] = m(t)$ y $\mathrm{Var}[X(t)] = \mathrm{E}[X(t)^2] - \mathrm{E}[X(t)]^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t)$:

$$\mathrm{E}[X(1)] = m(1) = (1-e^{-1})^2 = 0{,}3996.$$

$$\mathrm{Var}[X(1)] = C(1,1) = \left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)^2 - (1-e^{-1})^4 = 0{,}0272.$$

**e)**

$$m(t) = \mathrm{E}\left(e^{-(U_1+U_2)t}\right) = \mathrm{E}\left(e^{-U_1 t}e^{-U_2 t}\right) = \mathrm{E}\left(e^{-U_1 t}\right)\mathrm{E}\left(e^{-U_2 t}\right) =$$

$$\left(\int_0^1 e^{-ut}du\right)^2 = \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^2.$$

**30. a)** Como $A$ y $B$ son del mismo tipo, tienen los mismos parámetros. En particular, $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(B^2) = \int_1^2 a^2 da = \frac{7}{3}$.

$$m(t) = \mathrm{E}(A^2 - B^2 t + t^2) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(B^2)t + t^2 = \frac{7}{3}(1-t) + t^2.$$

**b)** La carga inicial es $X(0) = A^2$. La carga mínima se da cuando $0 = \frac{dX(t)}{dt} = -B^2 + 2t$, es decir, para $t = \frac{B^2}{2}$. Así, $X_{\text{min}} = A^2 - \frac{B^4}{4}$ y la diferencia entre los dos valores es $\frac{B^2}{4}$.

$$P\left(\frac{B^4}{4} > 3\right) = P(\sqrt[4]{12} < B \le 2) = 2 - \sqrt[4]{12} = 0{,}1388.$$

**c)** $X(0) = A^2$ y $X(1) = A^2 - B^2 + 1$.

$\mathrm{Cov}[X(0), X(1)] = \mathrm{Cov}(A^2, A^2 - B^2 + 1) = \mathrm{Cov}(A^2, A^2) - \mathrm{Cov}(A^2, B^2) + \mathrm{Cov}(A^2, 1) = \mathrm{Var}(A^2)$.

$\mathrm{Var}[X(0)] = \mathrm{Var}(A^2)$. $\mathrm{Var}[X(1)] = \mathrm{Var}(A^2 - B^2 + 1) = \mathrm{Var}(A^2) + \mathrm{Var}(B^2) = 2Var(A^2)$.

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}[X(0), X(1)]}{\sigma_{X(0)}\sigma_{X(1)}} = \frac{\mathrm{Var}(A^2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(A^2)}\sqrt{2Var(A^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071.$$

Aunque no ha sido necesario, observamos que $\mathrm{Var}(A^2) = \mathrm{E}(A^4) - \mathrm{E}(A^2)^2 = \int_1^2 a^4 da - (\frac{7}{3})^2 = \frac{34}{45}$.

**31.**

**a)** $m(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_V(v) dv$.

Ahora tenemos que $X(t) = e^{-(t-V)}$ si $V < t$ y $X(t) = 1$ si $V \ge t$. Entonces:

$$m(t) = \int_0^t e^{-(t-v)} \cdot ve^{-v} dv + \int_t^{\infty} 1 \cdot ve^{-v} dv$$

$$= e^{-t}\int_0^t vdv + \int_t^{\infty} ve^{-v} dv = \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t}.$$

**b)** $m(t)$ sigue el comportamiento decreciente de las realizaciones, si bien la media estadística ha hecho desaparecer la irregularidad (pincho).

Figura 11. Dos realizaciones del proceso $X(t)$

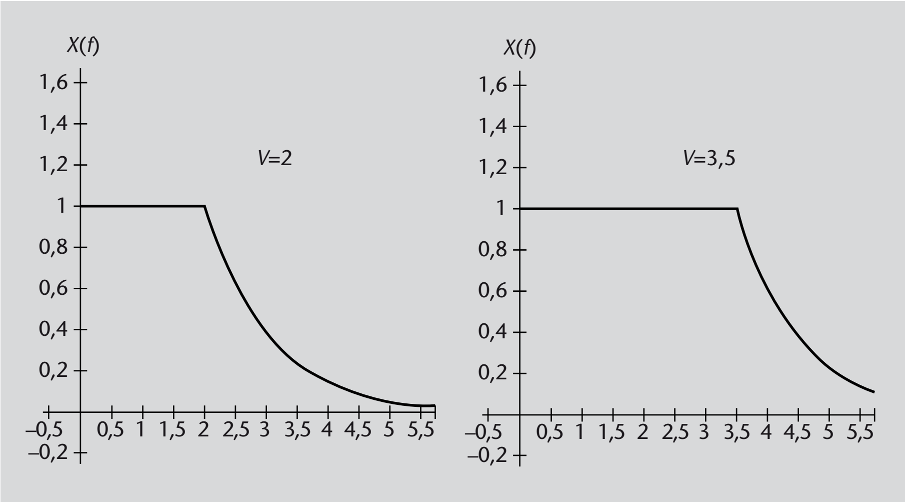



**Figura 11**

Dos realizaciones del proceso $X(t)$, uso del ancho de banda de una conexión.

Figura 12. Valor medio de $X(t)$

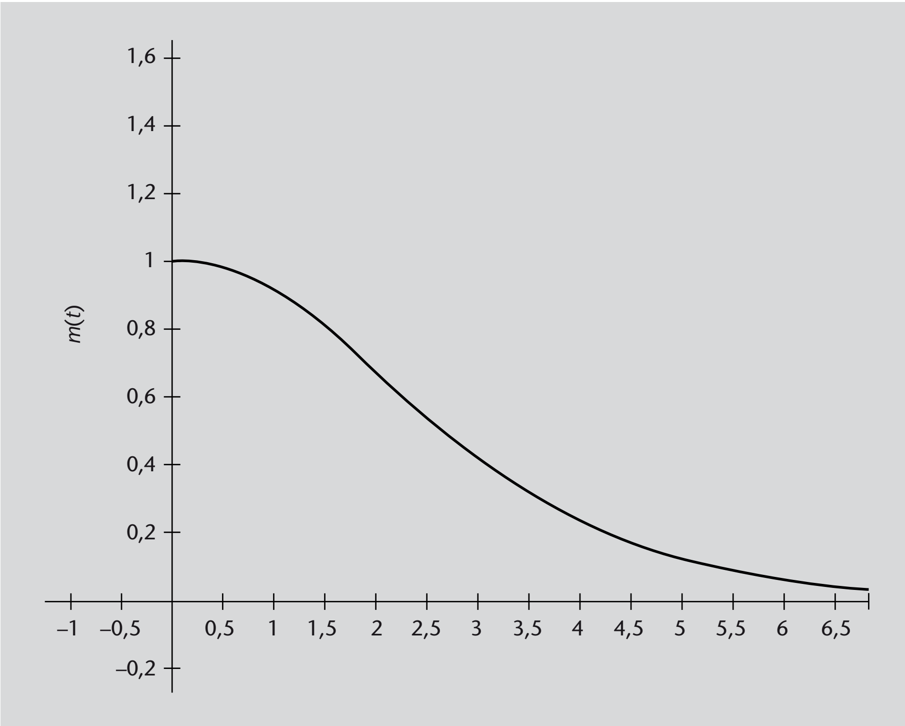



**Figura 12**

Valor medio de $X(t)$.

**c)** $P(X(t) = 1) = P(V \geq t) = \int_t^\infty ve^{-v}dv = (1+t)e^{-t}$.

**d)** El valor mínimo se da cuando $V = 0$ y $X(1) = e^{-1}$. El valor máximo es 1, y se pueden tomar todos los valores intermedios.

El hecho de tomar valores sobre un intervalo real indica carácter continuo, mientras que el hecho de que el valor 1 tenga probabilidad no nula indica aspectos discretos. Se trata de una variable mixta.