
Fecha de inicio: 04/04/2020

Consultor: Andrés García Saavedra **Fecha límite de entrega:** 24/04/2020

- Envía la solución en un archivo PDF que has de llamar `PEC3_MT_Apellido1_Apellido2`.
- Justifica siempre tus respuestas.
- Todos los ejercicios puntúan por igual.
- Puedes utilizar software matemático (por ejemplo, CalcMe) para las integrales y las gráficas, pero recuerda que el exámen no se permite usar el software CalcMe.

Ejercicios:

1. Considera el siguiente proceso estocástico:

$$Y(t) = \begin{cases} t^2 + t & 0 \leq t \leq V \\ 0 & t > V \end{cases}$$

donde V es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{(1+v)^2} & v \geq 0 \\ 0 & v < 0. \end{cases}$$

Se pide:
a) Calcula la media del proceso $Y(t)$, $m_Y(t)$.
b) Explica qué valores puede tomar la variable aleatoria $Y(2)$.
c) ¿Es $Y(t)$ un proceso de estado discreto o continuo? Justifica tu respuesta.

Solución
a) La media del proceso la calculamos usando la Definición 2.1 del Módulo 6 como

$$m_Y(t) = E(Y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) f_V(v) dv.$$

Como tenemos que $Y(t) = t^2 + t$ si $V \geq t$ y $Y(t) = 0$ si $V < t$, entonces

$$m_Y(t) = \int_0^t 0 \cdot \frac{1}{(1+v)^2} dv + \int_t^{\infty} (t^2+t) \cdot \frac{1}{(1+v)^2} dv = (t^2+t) \int_t^{\infty} \frac{1}{(1+v)^2} dv =$$
$$= (2-t)\Big(-\frac{1}{v+1}\Big)\Big|_t^{\infty} = \frac{t^2+t}{t+1} = t.$$

b) Tenemos que

$$Y(2) = \begin{cases} 6 & 2 \leq V \\ 0 & 2 > V \end{cases}$$

de manera que $Y(2)$ únicamente puede valer 0 y 6.

c) En general, $Y(t)$ solo puede tomar dos valores: 0 y $t^2 + t$. Por lo tanto, fijado t, $Y(t)$ es una variable discreta. Así pues, el proceso estocástico $Y(t)$ es de estado discreto.

2. Sea $X(n)$ el siguiente proceso estocástico:

$$X(n) = A \sin(n w_0 + \theta)$$

donde A y w_0 son constantes y θ sigue una distribución uniforme en $[-\pi, \pi]$. Se pide:
a) Calcula la media del proceso $X(n)$.
b) Calcula la autocorrelación del proceso $X(n)$.
c) Calcula la varianza del proceso $X(n)$.

Solución

Para resolver este ejercicio necesitaremos usar las definiciones de los diversos parámetros estadísticos de un proceso detalladas en el Módulo 6, apartado 2.

a) La media del proceso es, según la Definición 2.1 del Módulo 6,

$$m_X(n) = E(X(n)) = E(A\sin(nw_0 + \theta)).$$

Además, sabemos que θ es una variable aleatoria distribuida uniformemente en $[-\pi, \pi]$, por lo tanto su función de densidad de probabilidad es

$$f_\theta = \frac{1}{\pi - (-\pi)} = \frac{1}{2\pi}.$$

Ahora, usando la definición de la esperanza,

$$m_X(n) = \int_{-\infty}^{\infty} X(n) f_\theta(\alpha) d\alpha = \frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nw_0 + \alpha) d\alpha = -\frac{A}{2\pi}\cos(nw_0 + \alpha)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Observad que la media obtenida es independiente de n.

b) Según la Definición 2.2 del Módulo 6, tenemos que

$$R_X(k, l) = E(X(k)X(l)) = E\Big(A\sin(kw_0 + \theta)A\sin(lw_0 + \theta)\Big)$$

y usando la identidad trigonométrica

$$2\sin A\sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

nos queda

$$R_X(k, l) = \frac{A^2}{2}E\big(\cos[w_0(k - l)]\big) - \frac{A^2}{2}E\Big(\cos[w_0(k + l) + 2\theta]\Big) = \frac{A^2}{2}\cos[w_0(k - l)],$$

donde en el último paso hemos usado el hecho que $E(\theta) = \frac{\pi - \pi}{2} = 0$ (pues nos dicen que θ es una variable aleatoria uniforme en $[-\pi, \pi]$) y la identidad trigonométrica para el coseno de una suma:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Observad que la autocorrelación es una función de una sola variable, la diferencia de tiempos $k-l$.

c) Como la media del proceso es nula (apartado a)), la autocorrelación es igual a la covarianza:

$$c_X(k,l) = R_X(k,l) = \frac{A^2}{2}\cos[w_0(k-l)].$$

La covarianza evaluada en $k-l$ es la varianza, así pues

$$\sigma_X(n) = \frac{A^2}{2}$$

que es constante para todo n.

3. Considera el siguiente proceso estocástico $X(t)$

$$X(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{Y} & 0 \leq t \leq Y \\ \frac{t-Y}{1-Y} & Y \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde Y es una variable aleatoria distribuida uniformemente entre $[0,1]$. Se pide:
a) Calcula el valor medio del proceso estocástico $X(t)$, $m_X(t)$.
b) Dibuja una realización de $X(t)$ y la función $m_X(t)$. ¿Qué similitudes y diferencias encontráis entre $m_X(t)$ y la realizacion? Justifica tu respuesta.

Solución
Este ejercicio es análogo, por ejemplo, al Ejercicio 31 del Módulo 6.
a) Por la teoría del Módulo 6, Definición 2.1, sabemos que

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_Y(y) dy.$$

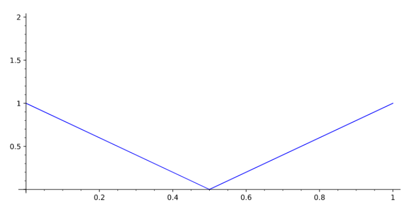
Ahora tenemos que $X(t) = 1 - \frac{t}{Y}$ si $0 \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{Y}$ y $X(t) = \frac{t-Y}{1-Y}$ si $\mathbf{Y} \leq \mathbf{t} \leq 1$.

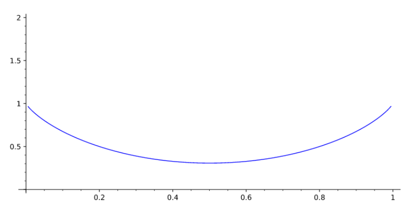
También sabemos que la función de densidad de una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[a, b]$ es $\frac{1}{b-a}$, por lo tanto la función de densidad de la variable aleatoria Y es $f_Y(y) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \int_t^1 \left(1 - \frac{t}{Y}\right) f_Y(y)dy + \int_0^t \left(\frac{t-Y}{1-Y}\right) f_Y(y)dy = \\ &= \int_t^1 \left(1 - \frac{t}{Y}\right) dy + \int_0^t \left(\frac{t-Y}{1-Y}\right) dy \\ &= 1 + t\ln t + (1-t)\ln(1-t). \end{aligned}$$

b) Para dibujar una realización de $X(t)$ debemos dar valores a Y, por ejemplo $Y = \frac{1}{2}$. También fijamos, por ejemplo, el tiempo en el intervalo $t = 0$ a $t = 1$.

En la primera figura representamos la realización de $X(t)$, mientras que en la segunda $m_X(t)$.





$m_X(t)$ sigue el comportamiento decreciente de la realización de $X(t)$, aunque la media estadística ha hecho desaparecer la irregularidad (pincho).

4. En un sistema de telecomunicaciones se hace uso de la señal aleatoria $Y(t)$, definida como

$$Y(t) = A\sin(wt + \theta) + B,$$

donde $\theta \sim U[0, 2\pi]$ y la función de probabilidad del vector aleatorio (A, B) es

$$P(A=a,B=b)=\frac{a}{20},\quad a\in\{1,2,3\},b\in\{1,\dots,a+1\}.$$

Se pide:
a) Calcula la media del proceso $Y(t)$.
b) Calcula la autocorrelación del proceso $Y(t)$.

Solución

Primero debemos calcular las funciones de probabilidad marginales de A y B:

$$P(A=a)=\begin{cases}\frac{1}{10} & a=1\\ \frac{3}{10} & a=2\\ \frac{6}{10} & a=3\end{cases}$$

$$P(B=b)=\begin{cases}\frac{3}{10} & b=1\\ \frac{3}{10} & b=2\\ \frac{1}{4} & b=3\\ \frac{3}{20} & b=4\end{cases}$$

a) Para calcular la media usamos la Definición 2.1 del Módulo 6, y obtenemos

$$m_Y(t)=E(Y(t))=E(A\sin(wt+\theta)+B)=E(A)E(\sin(wt+\theta))+E(B)=E(B)=\frac{9}{4}.$$

Notad que hemos usado la media de la variable aleatoria uniforme θ, siendo $E(\theta)=\pi$, y la identidad trigonométrica:

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$$

para deducir que $E(\sin(wt+\theta))=0$.

b) Para calcular la autocorrelación del proceso usamos la Definición 2.2 del Módulo 6. También usaremos la media de la variable aleatoria uniforme θ, siendo $E(\theta)=\pi$, y la identidad trigonométrica para el seno de una suma:

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) &= E\Big(A\sin(wt+\theta) + B\Big)E\Big(A\sin(w(t+\tau)+\theta) + B\Big) = \\
&= E\left(A^2 \sin(wt+\theta)\sin(w(t+\tau)+\theta\right) + E(B^2) + \\
&+ E\Big(AB\sin(wt+\theta)\Big) + E\Big(AB\sin(w(t+\tau)+\theta)\Big) = \\
&= E(A^2)E\Big(\sin(wt+\theta)\sin(w(t+\tau)+\theta)\Big) + E(B^2) + \\
&+ E(AB)E(\sin(wt+\theta)) + E(AB)\sin(w(t+\tau)+\theta) = \\
&= E(A^2)\frac{\cos(\tau w)}{2} + E(B^2) = \frac{67}{20}\cos(\tau w) + \frac{123}{20}.
\end{aligned}$$